

兰州理工大学研究生重点学位课程建设资助项目

现代控制理论及其 MATLAB 实现

韩致信 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书主要介绍应用现代控制理论进行系统分析和综合的方法及其 MATLAB 编程与计算。全书共分 6 章,主要包括:第 1 章控制系统的状态空间数学模型,第 2 章控制系统的运动分析,第 3 章控制系统的稳定性分析,第 4 章控制系统的能控性与能观测性,第 5 章线性定常控制系统的综合,第 6 章最优控制。本书配套的电子课件和习题参考答案,可登录华信教育资源网 www.hxedu.com.cn,注册后免费下载。

本书可作为机械工程、动力工程、仪器科学与技术、交通运输工程和船舶工程等学科的硕士研究生教材,也可作为自动化、电气工程及其自动化等专业的本科生教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论及其 MATLAB 实现/韩致信编著. —北京:电子工业出版社,2014.9
ISBN 978-7-121-24366-0

I. ①现… II. ①韩… III. ①现代控制理论—高等学校—教材②Matlab 软件—高等学校—教材
IV. ①O231②TP317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 215609 号

策划编辑:凌 毅 责任编辑:凌 毅

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1 092 1/16 印张:14.75 字数:378 千字

版 次:2014 年 9 月第 1 版

印 次:2014 年 9 月第 1 次印刷

印 数:3 000 册 定价:36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

现代控制理论是控制工程学科最重要的基础理论之一,前承经典控制理论,后继智能控制理论,成形于 20 世纪 60 年代初。其主要内容有线性系统理论、非线性系统理论、最优控制理论、随机控制理论和适应控制理论等。

现代控制理论的奠基成果是美国数学家贝尔曼(R. Richard Bellman)于 1954 年创立的动态规划法、前苏联数学家列夫·庞特里亚金(Лев Семёнович Понтрягин)于 1956 年创立的极大值原理和匈牙利裔美国数学家卡尔曼(Rudolph E. Kalman)于 1961 创立的卡尔曼滤波理论。这些成果为控制理论开辟了一个新天地并独立于经典控制理论而成为一个新领域。

现代控制理论是伴随着空间技术与计算机技术的发展而诞生和成熟的。正是飞速发展的空间技术使该理论有了思想源泉和用武之地,也正是日新月异的计算机技术为该理论提供了强有力的工具,使其如虎添翼。

虽然现代控制理论属于控制工程学科的基础理论,但它研究和解决的问题是系统问题,而系统问题不仅存在于控制工程学科,而且存在于大多数工程学科、自然学科和农林学科,甚至存在于经济和管理学科。尽管不同学科中的系统问题各有不同,但毕竟存在共性。共性问题可用相同或类似的方法解决。他山之石,可以攻玉,学科交叉和渗透更能促进学术进步。

对于非控制工程学科,现代控制理论是他山之石。然而现代控制理论的数学基础——状态空间模型又何尝不是控制工程学科的他山之石,因为状态空间模型源于机械工程学科的分析力学。这一事实说明不同学科之间虽然存在界线,但更存在交叉与融合。

现代控制理论是研究控制问题的基础理论,而控制是所有工程领域不可或缺的,无论是信息还是金融、机械还是纺织、宇航还是船舶、冶金还是化工、交通还是能源、家用电器还是仪器仪表等,哪个领域能离开控制?毫不夸张地说,没有控制就没有现代文明。从这个意义上讲,现代控制理论是所有工程学科的一块理论基石。

现代控制理论不仅是一门重要的学科理论,还是一门卓越的自然辩证法,处处贯穿着系统的观点、运动的观点、内因外因的观点、事物相互作用相互联系的观点、主要矛盾和次要矛盾的观点等,闪烁着辩证法的光芒。这些对于启迪思想、培养分析问题和解决问题的能力十分有益。学习和掌握这门理论,对从事科学研究和技术工作的人无疑十分必要。

由于上述原因,现代控制理论不仅是高等院校电气工程和自动化专业本科生和硕士研究生的学位课,也是机械工程、动力工程、仪器科学与技术、交通运输工程和船舶工程等专业硕士研究生的学位课。

翻开现代控制理论方面的著作,从头至尾整页整页的数学公式,乍一看,与数学别无二致。的确,现代控制理论的大部分内容不是数学论证就是数学计算,有些内容还触及应用数学前沿,但这些论证和计算是关于控制系统具体问题的数学论证和计算,或者说是求解具体控制工程问题的数学。对于读者来说,每一个问题的数学论证和计算或者有益于提高数学建模和分析能力,或者有益于提高分析和解决工程问题的能力,或者有益于培养逻辑推理和判断能力,总而言之,有益于充实理论和技术素养、提高科学研究能力。这也正是非控制工程专业的研究生学习现代控制理论的根本出发点和归宿。

本书是为适应机械工程和动力工程专业硕士研究生学位课程“现代控制理论”的教学需要编写的,内容的深度和广度也是根据这两专业研究生的知识结构和综合素质要求选定的。

与同类教材相比,本书的特点表现为“三多”,即例题多,结构图多,MATLAB 程序多。

● 例题多

现代控制理论包含许许多多定义、定理和公式,要弄清和掌握这些定义、定理和公式,一要记忆并透彻理解其文字描述和公式,二要完成适量练习。而要让读者准确理解定义、定理和公式并完成练习,仅凭简练透彻的文字描述和条理清晰的推导论证是远远不够的,必须提供足够的例题,以例题为桥梁,引导读者由表及里、由此及彼地在理论公式与应用计算中徜徉,实现融会贯通。

本书为所有重要内容配置了例题,特别是有些论证过程理论价值不大的定理直接用例题诠释,舍去推导过程。经对比和挑选,全书共设有 63 个例题,一个例题针对一个理论问题。

另外本书附录 A 提供了所有习题的参考答案,难度较大的习题,其答案步骤比较完整。

● 结构图多

系统结构图既是系统数学模型的图形描述,反映系统信号传输过程和相互联系,又是系统工程设计依据。

系统综合是控制理论研究的两大命题之一。系统综合的计算结果只有通过结构图体现出来,才能厘清信号传输过程和相互联系,为工程设计提供依据。比如说如何配置系统极点?如何设计解耦控制系统?如何设计带全维和降维状态观测器的状态反馈系统?如何实现二次型最优控制?凡此种种问题,仅凭计算过程和数据难以释清,必须要有结构图佐证。

本书的绝大多数算例配有系统结构图,旨在使读者一目了然地看清系统信号与计算数据之间的关系及物理特征,更直观地理解理论公式及其应用方法。

● MATLAB 程序多

MATLAB 是当今世界上最优秀的数值计算软件之一,内嵌的控制工程计算与仿真工具箱也是控制领域应用最为广泛的软件之一。

现代控制理论的应用计算都是矩阵运算,而 MATLAB 操作矩阵就像操作数一样简单,因此受到控制工程领域多数人的青睐。

为便于读者了解和掌握运用 MATLAB 求解控制问题的方法,凡是 MATLAB 提供了库函数的应用计算,本书对库函数的用法作了说明,凡是 MATLAB 没有提供库函数的应用计算,本书提供了编者开发的专用程序。书中共列有 19 套专用程序,所有程序均通过书内例题和其他书上例题验证。

本书在编写方面体现了编者近 40 年工程和教学实践形成的工程教育理念和认识:

(1) 以学以致用、实用够用为尺度剪裁内容,遴选精华。

(2) 对重点难点,浓墨重彩演绎论证,对简单内容,轻描淡写,以求重点突出、繁简适中。

(3) 注重方法论证,将问题转化、方法移植、归纳梳理等思考、分析和解决问题的方法贯穿于公式推导和分析过程,以求授人以渔。

(4) 按照一般认识规律进行论证,从因到果,循序渐近,层层深入,以求条理清晰,通俗易懂。

(5) 在论述方面,字斟句酌,追求透彻与精炼,即在分析透彻的前提下力求文字精炼,在文字精炼的基础上力求分析透彻。

书籍是精神食粮,教材是传道工具。是食粮就得精心制作,是工具就得精心打磨,这是编者一贯秉承的写作原则。为把本书雕琢成一部精品,编者精耕细作,付出了艰辛劳动,但囿于水平,书中错误和笔误在所难免,恳请读者不吝赐教。

最后指出,现代控制理论的数学特征往往让一些初学者望而生畏,有些学过的人也说难学。然而,“人之为学有难易乎?学之,则难者亦易矣;不学,则易者亦难矣。”事实上,此“数学”非彼数学,其应用和计算是程式化的,就像太极拳套路一样,既没有高超的技巧性,也没有隐藏的条件和陷阱,一点都不深奥。只要紧紧扣住“问题和条件——求解方法——结论和公式”这条技术路线认真学习并辅之以解题练习,掌握这门理论就如同探囊取物,手到擒来。

韩致信

2014年8月

目 录

第 1 章 控制系统的状态空间数学模型	1
1.1 基本概念	1
1.2 线性定常连续系统的状态空间数学模型	4
1.2.1 根据物理模型建立状态空间模型	4
1.2.2 根据微分方程建立状态空间模型	6
1.2.3 根据传递函数建立状态空间模型	10
1.2.4 根据系统的传递函数结构图建立状态空间模型	14
1.2.5 状态空间模型的线性变换	17
1.2.6 状态空间模型与传递函数矩阵之间的关系	20
1.3 线性时变连续系统的状态空间数学模型	20
1.4 非线性连续系统的状态空间数学模型	21
1.4.1 本质非线性系统的状态空间模型	21
1.4.2 本征非线性系统的状态空间模型	23
1.5 线性离散系统的状态空间数学模型	23
1.5.1 基本概念	23
1.5.2 线性定常离散系统的状态空间模型	24
1.6 线性定常系统状态空间模型的 MATLAB 实现	26
1.6.1 数学模型的 MATLAB 表示法	27
1.6.2 实现能控规范型的 MATLAB 编程及计算	29
习题 1	32
第 2 章 控制系统的运动分析	34
2.1 线性定常连续系统的运动分析	34
2.1.1 系统状态自由运动	34
2.1.2 状态转移矩阵	36
2.1.3 系统状态受控运动	41
2.1.4 系统的输出响应	42
2.1.5 实现线性定常连续系统运动分析的 MATLAB 编程	42
2.2 线性时变连续系统的运动分析	45
2.2.1 系统状态自由运动	45
2.2.2 状态转移矩阵	46
2.2.3 系统状态受控运动	48

2.2.4 系统输出响应	48
2.2.5 实现线性时变连续系统运动分析的 MATLAB 编程	49
2.3 线性定常离散系统的运动分析	52
2.3.1 线性定常连续系统的离散化及其 MATLAB 实现	52
2.3.2 线性定常离散系统的运动分析	55
2.3.3 实现线性定常离散系统运动分析的 MATLAB 编程	56
2.4 线性时变离散系统的运动分析	59
2.4.1 线性时变连续系统的离散化及其 MATLAB 实现	59
2.4.2 线性时变离散系统的状态运动分析	61
2.4.3 实现线性时变离散系统运动分析的 MATLAB 编程	62
习题 2	64
第 3 章 控制系统的稳定性分析	66
3.1 李雅普诺夫稳定性基本定理	66
3.1.1 数学基础	66
3.1.2 李雅普诺夫稳定性定义	68
3.1.3 李雅普诺夫稳定性定理	69
3.2 线性连续系统的稳定性分析	71
3.2.1 线性定常连续系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算	71
3.2.2 线性时变连续系统的稳定性分析	73
3.3 线性离散系统的稳定性分析	74
3.3.1 线性定常离散系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算	74
3.3.2 线性时变离散系统的稳定性分析	76
3.4 非线性连续系统的稳定性分析	77
3.4.1 克拉索夫斯基(Krasovski)法及其 MATLAB 编程与计算	77
3.4.2 变量梯度法	80
习题 3	82
第 4 章 控制系统的能控性与能观测性	83
4.1 系统的能控性	83
4.1.1 线性时变连续系统的状态能控性	83
4.1.2 线性定常连续系统的状态能控性及其 MATLAB 辅助分析	86
4.1.3 线性离散系统的状态能控性	89
4.1.4 系统的输出能控性	90
4.2 系统的能观测性	90
4.2.1 线性时变连续系统的能观测性	90
4.2.2 线性定常连续系统的状态能观测性及其 MATLAB 辅助分析	91
4.2.3 线性定常离散系统的状态能观测性	94
4.3 能控与能观测规范型的实现	95
4.3.1 能控规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算	95

4.3.2 能观测规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算	98
4.4 线性定常系统能控性与能观测性在复域 $[s]$ 中的判据	102
4.5 对偶系统及对偶性原理	104
4.5.1 线性定常对偶系统	104
4.5.2 线性时变对偶系统	105
4.6 线性定常系统能控与能观测结构分解	106
4.6.1 能控与不能控结构分解及其 MATLAB 辅助计算	107
4.6.2 能观测与不能观测结构分解及其 MATLAB 辅助计算	109
4.6.3 能控性与能观测性结构综合分解	112
习题 4	115
第 5 章 线性定常控制系统的综合	116
5.1 反馈控制系统的基本概念	116
5.1.1 状态反馈控制系统	117
5.1.2 输出反馈控制系统	118
5.2 以实现期望极点为目标的系统综合	120
5.2.1 单输入状态反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算	120
5.2.2 多输入状态反馈控制系统的极点配置方法	123
5.2.3 输出反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算	123
5.3 以实现系统镇定为目标的系统综合	125
5.4 以实现解耦控制为目标的系统综合	128
5.4.1 补偿器解耦	128
5.4.2 状态反馈解耦	129
5.4.3 实现状态反馈解耦控制计算的 MATLAB 编程与计算	131
5.5 状态重构控制系统	133
5.5.1 全维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计	133
5.5.2 带全维状态重构器的状态反馈系统及其 MATLAB 辅助设计	137
5.5.3 降维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计	139
习题 5	145
第 6 章 最优控制	147
6.1 泛函及其变分法简介	147
6.2 最优控制及其变分解法	149
6.2.1 数学模型	149
6.2.2 求解最优控制问题的变分法——拉格朗日乘子法	150
6.3 线性二次型最优控制	155
6.3.1 线性二次型最优控制的目标泛函	155
6.3.2 状态调节器及其 MATLAB 辅助设计	157
6.3.3 输出调节器	164
6.3.4 输出跟踪器及其 MATLAB 辅助设计	167

6.4 极小值原理	173
6.4.1 连续系统的极小值原理	173
6.4.2 Bang-Bang 开关控制	174
6.5 离散系统的最优控制	180
6.5.1 控制无约束的离散系统的最优控制	180
6.5.2 控制有约束的离散系统的最优控制	181
6.6 动态规划法	183
6.6.1 多级决策过程及最优性原理	183
6.6.2 离散系统的动态规划	185
6.6.3 连续系统的动态规划	188
习题 6	193
附录 A 习题参考答案	195
参考文献	224

第 1 章 控制系统的状态空间数学模型

内容提示:本章论证控制系统的状态空间数学模型,包括线性定常连续系统的状态空间模型及其线性变换、线性时变连续系统的状态空间模型、非线性系统状态空间模型、线性定常离散系统的状态空间模型、线性定常系统状态空间模型的 MATLAB 实现等。

任何一个控制系统都是由若干个元件构成的,每个元件都有其特定的物理功能。

组成控制系统的元件,不论是电气的,还是机械的,其物理功能总可以用相应的物理量和物理量间的数学关系式来描述,不同功能间的相互关系也总可以用相应的物理量间的数学关系式来描述。系统的数学模型就是用来描述系统物理功能的数学表达式,是物理模型或物理特性的数学描述。

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出线性定常系统,赖以解决问题的主要工具是各种图表,与之相适应,主要数学模型是传递函数。

现代控制理论研究的控制系统既可以是单输入单输出的,也可以是多输入多输出的;既可以是定常的,也可以是时变的;既可以是线性的,也可以是非线性的;赖以解决问题的主要工具是电子计算机,与之相适应,主要数学模型是状态空间模型。

1.1 基本概念

1. 输入量和输入向量

输入量也叫控制量,通常是物理量,用来控制系统。

单输入系统只有一个输入量 $u(t)$, p 输入系统有 p 个输入量,即 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 。由输入量作为分量形成的向量称为输入向量或控制向量,即

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_p(t)]^T$$

2. 输出量和输出向量

输出量也叫观测量,一般也是物理量,是系统的被控制量,必须按照规定的方式变化。

单输出系统只有一个输出量 $y(t)$, q 输出系统有 q 个输出量,即 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ 。由输出量作为分量形成的向量称为输出向量,即

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_q(t)]^T$$

3. 状态变量、状态向量和状态空间

(1) 状态变量

用来描述系统动态行为的信息集合称为系统状态,用来表示系统状态的一组数学变量称为状态变量,如 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。 n 为有穷整数的系统称为集总参数系统, $n \rightarrow \infty$ 的系统称为分布参数系统。

为了充分且必要表达系统的运动行为,状态变量的个数应当是恰如其分的,不多也不少,少了不足以唯一确定系统的动态行为,多了也是冗余的。这一特性称为状态变量的最小性。如果系统的微分方程阶数是 n ,那么其状态变量数必定是 n 。

由于观察问题的角度和处理问题的着眼点不同,同一系统的状态变量可以有不同的选取方法,可以是物理量,也可以是纯数学量。这一特性称为状态变量的非唯一性。

状态变量互相之间是独立的,无隶属关系。这一特性称为状态变量的独立性。

(2) 状态向量

状态向量是以状态变量为分量的向量,即

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$$

(3) 状态空间

以状态向量的分量为坐标轴张成的欧几里德空间 \mathbf{R}^n 称为状态空间。

状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 随初始状态向量 $\mathbf{x}(t_0)$ 和输入量的变化而变化,在任意时刻 t , $\mathbf{x}(t)$ 在状态空间 \mathbf{R}^n 中是一个点,当时间 t 变化时, $\mathbf{x}(t)$ 随之变化并形成一条轨迹,这条轨迹称为状态轨迹。

4. 状态方程

系统的状态变量随输入量的变化而变化。用来描述系统状态变量与输入量之间关系的一组一阶微分方程称为状态方程。

非线性时变系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (1-1a)$$

将上式写成向量形式,得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1-1b)$$

非线性定常系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

线性时变系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1-3)$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}_{n \times n}, \text{称为系统矩阵};$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix}_{n \times p}, \text{称为输入(或控制)矩阵}。$$

对于 $p = 1$ 的单输入问题,输入矩阵退化为一列向量,用 $\mathbf{B}(t)$ 的同名小写字符 $\mathbf{b}(t)$ 表示。线性定常系统的系统矩阵和输入矩阵均为常数矩阵,故状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-4)$$

5. 输出(或观测) 方程

系统输入量和状态变量的变化决定着输出量的变化。用来描述系统输出量与状态变量及输入量之间关系的方程称为输出(或观测) 方程。

非线性时变系统输出方程的一般表达式为

$$y_i = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (1-5a)$$

将上式写成向量形式,得

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1-5b)$$

非线性定常系统输出方程的一般表达式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

线性时变系统输出方程的一般表达式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (1-7)$$

式中

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}(t) & c_{q2}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}_{q \times n}, \text{称为输出(或观测) 矩阵;}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1}(t) & d_{q2}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}_{q \times p}, \text{称为前馈(或顺馈) 矩阵。}$$

线性定常系统的输出矩阵和前馈矩阵均为常数矩阵,故输出方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-8)$$

系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵和前馈矩阵都只与系统的结构及其参数有关,统称为系数矩阵。

系统的状态空间模型描述的是系统的输入、状态及输出三者之间的动态关系,故状态方程和输出方程统称为动态方程。

由于状态变量的非唯一性,同一系统可以具有不同的动态方程。但不论怎样选取状态变量,系统的传递函数矩阵必定是唯一的,对于一定的输入和初始条件,系统的输出也必定是唯一的。

为了保障微分方程解的存在性,状态变量的选取不能使状态方程含有输入量的导数项,因为有些输入量的导数不连续,会使状态方程无解。

线性系统的动态方程完全决定于其系数矩阵,为简化叙述,常常直接表示为 $\sum (\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$ (线性时变系统) 或 $\sum (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ (线性定常系统)。

6. 系统的结构图

系统输入变化必将引起状态变化,状态的变化必将引起输出的变化。这种信号转化关系可用图 1.1 和图 1.2 描述,这种框图称为系统数学模型结构图,简称系统结构图。

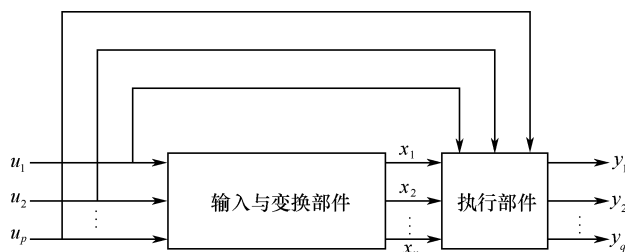


图 1.1 非线性系统输入—状态—输出关系图

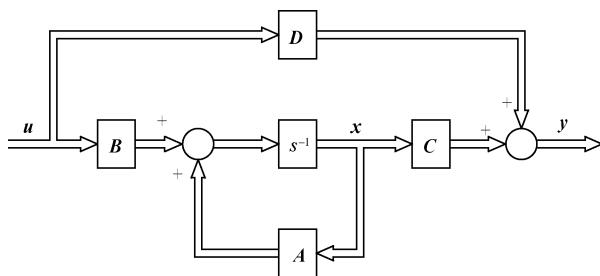


图 1.2 线性定常连续系统矩阵—向量结构图

1.2 线性定常连续系统的状态空间数学模型

1.2.1 根据物理模型建立状态空间模型

当已知系统的物理模型时,状态变量一般选物理量,特别是标志能量大小的物理量,如机械系统中弹性元件的变形(反映位能)和质量元件的速度(反映动能)、电气系统中的电容电压(反映电能)和电感电流(反映磁能)。

【例 1.1】 由质量为 $M(\text{kg})$ 的质块、刚度为 $k(\text{N/m})$ 的无重弹簧及阻尼系数为 $f(\text{N} \cdot \text{s/m})$ 的阻尼器组成的质量-弹簧-阻尼系统如图 1.3 所示。试建立以激励力 p 为输入量、以质块位移 y 为输出量的状态空间模型。

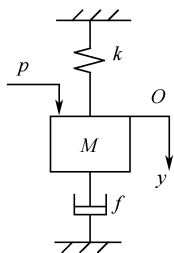


图 1.3 质量-弹簧-阻尼系统

解 质块在激励力 p 作用下即产生运动,为研究其运动规律,取其静平衡位置为运动坐标原点,运动位移坐标为 y , y 的正方向如图 1.3 所示。

应用达朗贝尔原理或牛顿运动定律,容易求得系统的微分方程,即

$$M\ddot{y} + f\dot{y} + ky = p \quad (\text{E1})$$

选取弹簧变形和质块速度为状态变量,即

$$x_1 = y \quad (\text{E2})$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (\text{E3})$$

对以上两式求导数,得

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{E4})$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (\text{E5})$$

由式(E1) 得

$$\ddot{y} = -\frac{k}{M}y - \frac{f}{M}\dot{y} + \frac{1}{M}p \quad (\text{E6})$$

将上式和已定义的状态变量代入式(E5),得

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{f}{M}x_2 + \frac{1}{M}p \quad (\text{E7})$$

式(E4) 和式(E7) 即为系统的状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}p \quad (\text{E8})$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (\text{状态向量}), \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} (\text{系统矩阵}), \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} (\text{输入矩阵}).$$

由式(E2) 直接可得系统的输出方程,即

$$y = x_1 = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\text{E9})$$

式中, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ (输出矩阵)。

【例 1.2】 一个由电阻、电容和电感元件组成的四端无源网络如图 1.4 所示,试建立以输入电压 u_i 为输入量、以输出电压 u_o 为输出量的状态空间模型。

解 假设流经电感的电流为 i_L , 流经电容的电流为 i_c , 电容上的电压为 v_c , 则由基尔霍夫定律可得

$$R_1(i_L + i_c) + L \frac{di_L}{dt} = u_i$$

$$R_1(i_L + i_c) + v_c + R_2 i_c = u_i$$

$$u_o = R_2 i_c$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

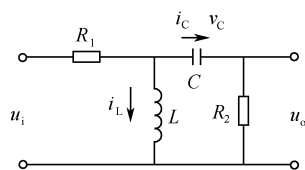


图 1.4 四端无源网络

选取电容电压 v_c 和电感电流 i_L 为状态变量, 即 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [v_c \ i_L]^T$, 按照与前例类似的推导方法, 可得系统的状态方程和输出方程, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_i$$

$$\mathbf{y} = u_o = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u_i$$

式中, 各系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

系统的动态方程结构如图 1.5 所示。

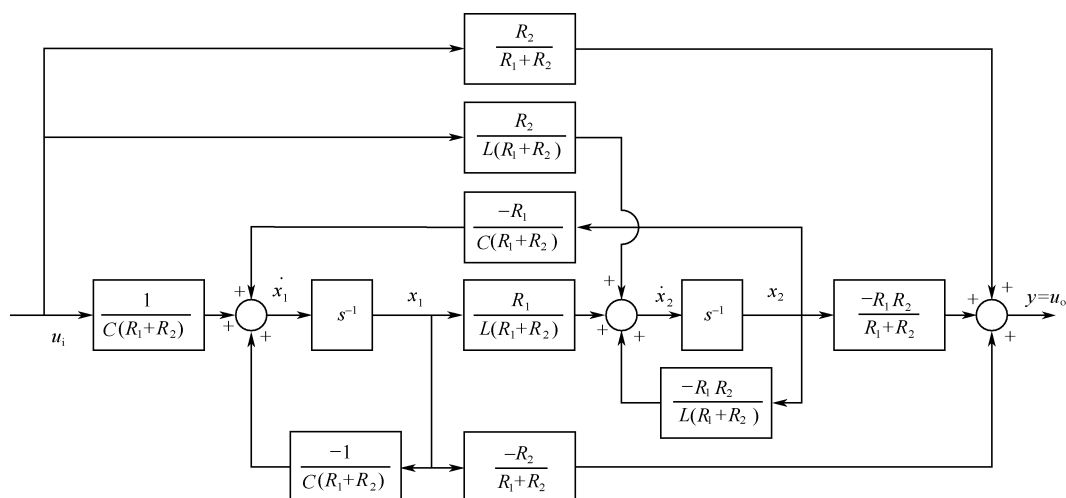


图 1.5 系统结构图

1.2.2 根据微分方程建立状态空间模型

当已知系统的微分方程时,可根据高阶微分方程与一阶微分方程组的关系将其化为一阶微分方程组。由于状态变量选取的非唯一性,同一微分方程可演化出许多不同的状态空间模型,其中最常用的是两种观测器规范型。

1. 能观测规范 I 型

为使问题简单化且又不失一般性,先研究由 4 阶微分方程建立状态空间模型的方法。

4 阶微分方程的一般表达式为

$$\begin{aligned} y^{(4)}(t) + a_3 y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_4 u^{(4)}(t) + b_3 u^{(3)}(t) + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中, $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 和 $b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 均为常数。

4 阶微分方程须选 4 个状态变量,有一种选取方法是

$$x_1 = y - b_4 u \quad (1-10)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u \quad (1-11)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u \quad (1-12)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 - \beta_2 u \quad (1-13)$$

式中, $\beta_i (i = 0, 1, 2)$ 为待定系数。

显然,这样选定了状态变量后,如果确定了系数 $\beta_i (i = 0, 1, 2)$,由式(1-11) ~ 式(1-13),直接可得 3 个状态方程,即

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_0 u \quad (1-14)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_1 u \quad (1-15)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 + \beta_2 u \quad (1-16)$$

下面分析如何确定系数 $\beta_i (i = 0, 1, 2)$ 和 \dot{x}_4 。

从式(1-10)开始依次向下进行迭代,可得

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u = \dot{y} - b_4 \dot{u} - \beta_0 u \quad (1-17)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u = \ddot{y} - b_4 \ddot{u} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \quad (1-18)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 - \beta_2 u = y^{(3)} - b_4 u^{(3)} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \quad (1-19)$$

对上式求导数,可得

$$\dot{x}_4 = y^{(4)} - b_4 u^{(4)} - \beta_0 u^{(3)} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} \quad (1-20)$$

由给定微分方程(1-9),可得

$$y^{(4)} - b_4 u^{(4)} = -a_0 y - a_1 \dot{y} - a_2 \ddot{y} - a_3 y^{(3)} + b_3 u^{(3)} + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (1-21)$$

联立式(1-21)、式(1-17) ~ 式(1-19) 和式(1-20),经迭代消元可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + \\ & (b_3 - a_3 b_4 - \beta_0) u^{(3)} + (b_2 - a_2 b_4 - a_3 \beta_0 - \beta_1) \ddot{u} + \\ & (b_1 - a_1 b_4 - a_2 \beta_0 - a_3 \beta_1 - \beta_2) \dot{u} + (b_0 - a_0 b_4 - a_1 \beta_0 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_2) u \end{aligned} \quad (1-22)$$

为使状态方程不含输入量的导数项,令

$$\beta_0 = (b_3 - a_3 b_4) \quad (1-23)$$

$$\beta_1 = (b_2 - a_2 b_4) - a_3 \beta_0 \quad (1-24)$$

$$\beta_2 = (b_1 - a_1 b_4) - a_2 \beta_0 - a_3 \beta_1 \quad (1-25)$$

再引入系数

$$\beta_3 = (b_0 - a_0 b_4) - a_1 \beta_0 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_2 \quad (1-26)$$

可得

$$\dot{x}_4 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + \beta_3 u \quad (1-27)$$

式(1-14) ~ 式(1-16) 和式(1-27) 即为系统的状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{ol}} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{\text{ol}} u \quad (1-28)$$

式中,系统矩阵和控制矩阵及状态向量分别为

$$\mathbf{A}_{\text{ol}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{\text{ol}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

由式(1-10) 直接可得系统的输出方程,即

$$y = \mathbf{C}_{\text{ol}} \mathbf{x} + Du \quad (1-29)$$

式中,输出矩阵和顺馈矩阵(退化为常数) 分别为

$$\mathbf{C}_{\text{ol}} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad D = b_4$$

系统矩阵和输出矩阵具有如上形式的状态空间模型称为能观测规范 I 型,简记为 $\sum(\mathbf{A}_{\text{ol}}, \mathbf{C}_{\text{ol}})$ 。

将以上方法推广到如下 n 阶微分方程

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

可得 n 阶系统的能观测规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{\text{ol}}, \mathbf{C}_{\text{ol}})$, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{ol}} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{\text{ol}} u \quad (1-30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{\text{ol}} \mathbf{x} + Du \quad (1-31)$$

式中

$$\mathbf{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{o1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{o1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \quad D = b_n$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (b_{n-1} - a_{n-1}b_n) \\ \beta_1 &= (b_{n-2} - a_{n-2}b_n) - a_{n-1}\beta_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{n-2} &= (b_1 - a_1b_n) - a_2\beta_0 - \cdots - a_{n-2}\beta_{n-4} - a_{n-1}\beta_{n-3} \\ \beta_{n-1} &= (b_0 - a_0b_n) - a_1\beta_0 - \cdots - a_{n-2}\beta_{n-3} - a_{n-1}\beta_{n-2} \end{aligned}$$

为便于记忆和计算机计算,将这些系数表达式写成矩阵形式,可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (1-32a)$$

或

$$\begin{bmatrix} b_n \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (1-32b)$$

【例 1.3】 假设系统的微分方程为

$$y^{(4)} + y^{(3)} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u^{(4)} + u^{(3)} + 5\ddot{u} + 2\dot{u} + u$$

试求其状态空间数学模型。

解 令

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, a_2 = 3, a_1 = 2, a_0 = 1 \\ b_4 &= 2, b_3 = 1, b_2 = 5, b_1 = 2, b_0 = 1 \\ \beta_0 &= (b_3 - a_3b_4) = -1 \\ \beta_1 &= (b_2 - a_2b_4) - a_3\beta_0 = 0 \\ \beta_2 &= (b_1 - a_1b_4) - a_2\beta_0 - a_3\beta_1 = 1 \\ \beta_3 &= (b_0 - a_0b_4) - a_1\beta_0 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2 = 0 \end{aligned}$$

系统的能观测规范 I 型 $\sum (\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} + 2u$$

2. 能观测规范 II 型

假设 n 阶系统的微分方程为

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) \\ = b_nu^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \end{aligned}$$

如下选取状态变量

$$x_n = y - b_nu \quad (1-33)$$

$$x_{n-1} = \dot{x}_n + a_{n-1}x_n - \beta_{n-1}u \quad (1-34)$$

$$x_{n-2} = \dot{x}_{n-1} + a_{n-2}x_n - \beta_{n-2}u \quad (1-35)$$

.....

$$x_2 = \dot{x}_3 + a_2x_n - \beta_2u \quad (1-36)$$

$$x_1 = \dot{x}_2 + a_1x_n - \beta_1u \quad (1-37)$$

式中, $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 为待定系数。

仿照前面能观测规范 I 型的迭代推导方法, 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{o2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{o2}u \quad (1-38)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{o2}\mathbf{x} + Du \quad (1-39)$$

式中

$$\mathbf{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{o2} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{o2} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad D = b_n$$

其中

$$\beta_i = b_i - a_i b_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

系统矩阵和输出矩阵具有如上形式的状态空间模型称为能观测规范 II 型, 简记为 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 。

因 $\beta_i = b_i - a_i b_n (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, 所以当系统微分方程输入量的最高导数阶数小于输出量的最高导数阶数(即 $b_n = 0$) 时, 控制矩阵的元素为输入量及其各阶导数的系数, 即 $\mathbf{b}_{o2} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}]^T$ 。特别当微分方程不含输入量的导数时, $\mathbf{b}_{o2} = [b_0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 。

【例 1.4】 假设系统的微分方程为

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u^{(3)} + 5\ddot{u} + 2\dot{u} + u$$

试求其状态空间数学模型。

解 本例输入量的最高导数阶数为 3, 输出量的最高导数阶数为 4, 根据上面的结论, 可直接写出能观测规范 II 型 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

1.2.3 根据传递函数建立状态空间模型

当已知系统的传递函数时,可借助于传递函数与微分方程的关系及结构图将其化为一阶微分方程组。由于状态变量选取的非唯一性,同一传递函数可演化出许多不同的状态空间模型,其中最常用的是两种控制器规范型。

1. 能控规范 I 型

假设 n 阶系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (1-40)$$

应用综合除法将上式化为严格真有理分式函数,可得

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - a_1 b_n) s + (b_0 - a_0 b_n)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (1-41)$$

与上式对应的系统结构如图 1.6 所示。

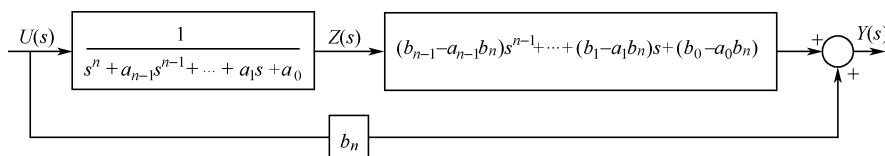


图 1.6 系统结构图

如图 1.6 所示引入中间变量 $Z(s)$, 可得

$$Z(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s) \quad (1-42)$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Z(s) = U(s) \quad (1-43)$$

$$Y(s) = [(b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - a_1 b_n) s + (b_0 - a_0 b_n)] Z(s) + b_n U(s) \quad (1-44)$$

对式(1-43)和式(1-44)进行拉氏逆变换,可得

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = u \quad (1-45)$$

$$y = (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) z^{(n-1)} + \cdots + (b_1 - a_1 b_n) \dot{z} + (b_0 - a_0 b_n) z + b_n u \quad (1-46)$$

如下选取一组相变量作为状态变量

$$x_1 = z \quad (1-47)$$

$$x_2 = \dot{z} \quad (1-48)$$

$$x_3 = \ddot{z} \quad (1-49)$$

.....

$$x_{n-1} = z^{(n-2)} \quad (1-50)$$

$$x_n = z^{(n-1)} \quad (1-51)$$

对以上诸式求一阶导数并代入定义的状态变量,可得

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \quad (1-52)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = x_3 \quad (1-53)$$

$$\dot{x}_3 = z^{(3)} = x_4 \quad (1-54)$$

.....

$$\dot{x}_{n-1} = z^{(n-1)} = x_n \quad (1-55)$$

$$\dot{x}_n = z^{(n)} \quad (1-56)$$

联立式(1-45)和式(1-56)并代入定义的状态变量,可得

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + u \quad (1-57)$$

式(1-52) ~ 式(1-55)及式(1-57)即为系统状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{cl}} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{\text{cl}} u \quad (1-58)$$

式中

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

将定义的状态变量代入式(1-46),可得系统输出方程,即

$$y = (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n + \cdots + (b_1 - a_1b_n)x_2 + (b_0 - a_0b_n)x_1 + b_n u \quad (1-59)$$

或

$$y = \mathbf{C}_{\text{cl}} \mathbf{x} + Du \quad (1-60)$$

式中

$$\mathbf{C}_{\text{cl}} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad D = b_n$$

其中, $\beta_i = b_i - a_i b_n (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 。

系统矩阵和输入矩阵具有如上形式的状态空间模型称为能控规范 I 型,简记为 $\sum(\mathbf{A}_{\text{cl}}, \mathbf{b}_{\text{cl}})$ 。

将 $\sum(\mathbf{A}_{\text{cl}}, \mathbf{b}_{\text{cl}})$ 与 $\sum(\mathbf{A}_{\text{o2}}, \mathbf{C}_{\text{o2}})$ 进行比较,容易看出

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A}_{\text{o2}}^T \quad \mathbf{b}_{\text{cl}} = \mathbf{C}_{\text{o2}}^T \quad \mathbf{C}_{\text{cl}} = \mathbf{b}_{\text{o2}}^T$$

另须指出,当系统传递函数为严格真有理分式函数(即 $b_n = 0$)时,输出矩阵的元素为传递函数分子多项式的系数,即 $\mathbf{C}_{\text{cl}} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$ 。特别当传递函数分子为常数 b_0 时, $\mathbf{C}_{\text{cl}} = [b_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ 。

【例 1.5】 假设系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

试求其状态空间数学模型。

解 因传递函数为严格真有理分式函数,故可直接写出能控规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{\text{cl}}, \mathbf{b}_{\text{cl}})$,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 2] \mathbf{x}$$

2. 能控规范 II 型

对于传递函数式(1-40)及其对应的微分方程式(1-45)和式(1-46),如下选取状态变量

$$x_n = z \quad (1-61)$$

$$x_{n-1} = \dot{x}_n + a_{n-1}z \quad (1-62)$$

$$x_{n-2} = \dot{x}_{n-1} + a_{n-2}z \quad (1-63)$$

$$\dots\dots$$

$$x_2 = \dot{x}_3 + a_2z \quad (1-64)$$

$$x_1 = \dot{x}_2 + a_1z \quad (1-65)$$

仿照前面能观测规范 I 型的迭代推导方法,可推得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{c2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{c2}u \quad (1-66)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{c2}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad (1-67)$$

式中

$$\mathbf{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{c2} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-2} \quad \beta_{n-1}] \quad \mathbf{D} = b_n$$

其中, $\beta_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 按式(1-32)计算。

系统矩阵和输入矩阵具有如上形式的状态空间模型称为能控规范 II 型,简记为 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 。

将 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 与 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 进行比较,容易看出

$$\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{A}_{o1}^T, \mathbf{b}_{c2} = \mathbf{C}_{o1}^T, \mathbf{C}_{c2} = \mathbf{b}_{o1}^T$$

【例 1.6】假设系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

试求其状态空间数学模型。

解 本例实际上与例 1.3 相同,只不过用传递函数代替了微分方程。

根据上面的结论,很容易写出 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 模型,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} + 2u$$

3. 约当规范型

已知系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1-68)$$

假设传递函数的极点有一个 ρ 重极点 λ_ρ , 其余极点为 $\lambda_i (i = \rho + 1, \rho + 2, \dots, n)$ 且 $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_\rho (i \neq j)$, 则上式可化为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{(s - \lambda_\rho)^\rho \prod_{i=\rho+1}^n (s - \lambda_i)} \quad (1-69)$$

展成部分分式, 得

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_1}{(s - \lambda_\rho)^\rho} + \dots + \frac{c_{\rho-1}}{(s - \lambda_\rho)^2} + \frac{c_\rho}{s - \lambda_\rho} + \sum_{i=\rho+1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} \quad (1-70)$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{(s - \lambda_\rho)^\rho} U(s) + \dots + \frac{c_\rho}{s - \lambda_\rho} U(s) + \sum_{i=\rho+1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s) \quad (1-71)$$

式中, $c_i (i = 1, \dots, n)$ 为常数。

与上式对应的系统结构如图 1.7 所示。

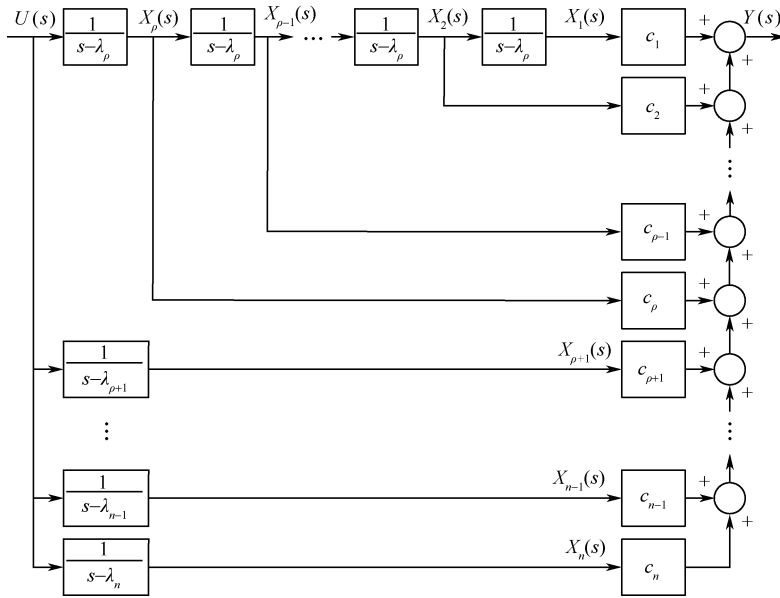


图 1.7 约当规范型系统结构图

如图 1.7 所示在各一次项倒数环节的输出端定义一个状态变量, 可得

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_\rho} X_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, \rho - 1) \quad (1-72)$$

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s) \quad (i = \rho, \rho + 1, \dots, n) \quad (1-73)$$

去分母并移项, 可得

$$sX_i(s) = \lambda_\rho X_i(s) + X_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, \rho - 1) \quad (1-74)$$

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s) \quad (i = \rho, \rho + 1, \dots, n) \quad (1-75)$$

进行拉氏逆变换, 可得

$$\dot{x}_i = \lambda_\rho x_i + x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, \rho - 1) \quad (1-76)$$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u \quad (i = \rho, \rho + 1, \dots, n) \quad (1-77)$$

这便是状态方程, 其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1-78)$$

式中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_\rho & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_\rho & 1 \\ 0 & & & \lambda_\rho \\ \hline & & & \lambda_{\rho+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\rho-1} \\ x_\rho \\ \vdots \\ x_{\rho+1} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

由图 1.7 直接可得输出方程,即

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (1-79)$$

或

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1-80)$$

式中, $\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$ 。

系统矩阵为约当矩阵 \mathbf{J} 的状态空间模型称为约当规范型。显然, \mathbf{J} 的对角线元素为系统的极点, 而约当小块中的对角线元素就是重极点。

4. 对角线规范型

假设传递函数式(1-68)的极点为 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 且 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$, 即

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)} \quad (1-81)$$

将上式展成部分分式, 得

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} \quad (1-82)$$

仿照上面约当规范型的推导方法, 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1-83)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1-84)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

系统矩阵为对角线矩阵的状态空间模型称为对角线规范型。显然对角线元素为系统的极点, 对角线规范型是约当规范型的特例。

1.2.4 根据系统的传递函数结构图建立状态空间模型

当已知系统的传递函数结构图时, 仿照上面约当规范型的状态变量定义方法, 对每个积分环节和一次项倒数环节的输出端定义一个状态变量, 再通过简单数学运算即可建立状态空间

模型。当结构图中含有二次项或更高次有理分式函数环节时,可应用梅逊公式和结构图等效变换方法将其化为一次项倒数环节的组合形式。还可以综合运用以上几种方法来建立状态空间模型。下面举例说明。

【例 1.7】 假设系统的结构如图 1.8(a) 所示,试建立其状态空间模型。

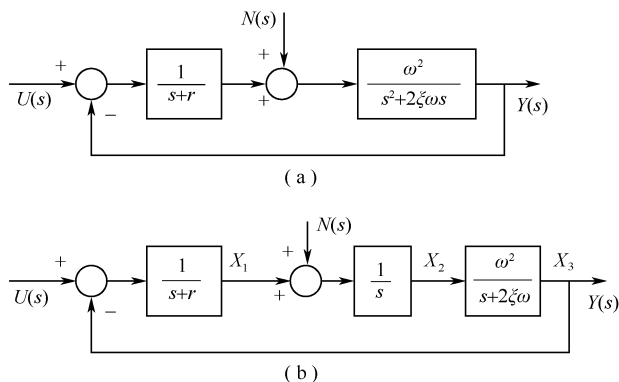


图 1.8 系统结构图

将图 1.8(a) 等效变换为图 1.8(b) 并如图所示在各一次项倒数环节的输出端定义一个状态变量,可得

$$X_1(s) = \frac{1}{s+r}[U(s) - X_3(s)]$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}[N(s) + X_1(s)]$$

$$X_3(s) = \frac{\omega^2}{s+2\xi\omega}X_2(s)$$

$$Y(s) = X_3(s)$$

由以上诸式,易得

$$\dot{x}_1 = -rx_1 - x_3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + n$$

$$\dot{x}_3 = \omega^2 x_2 - 2\xi\omega x_3$$

$$y = x_3$$

将以上状态方程和输出方程写成向量形式,可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

【例 1.8】 假设系统的结构如图 1.9(a) 所示,试建立其状态空间数学模型。

解 (1) 解法一

应用梅逊公式,将图 1.9(a) 结构等效变换为图 1.9(b) 并如图在各积分环节和一次项倒数环节的输出端定义一个状态变量,可得

$$y = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

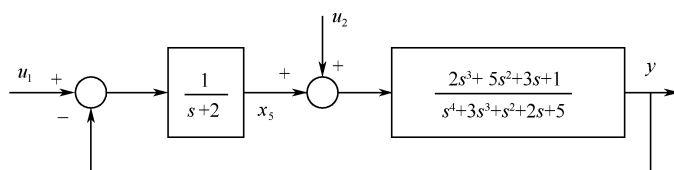
$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

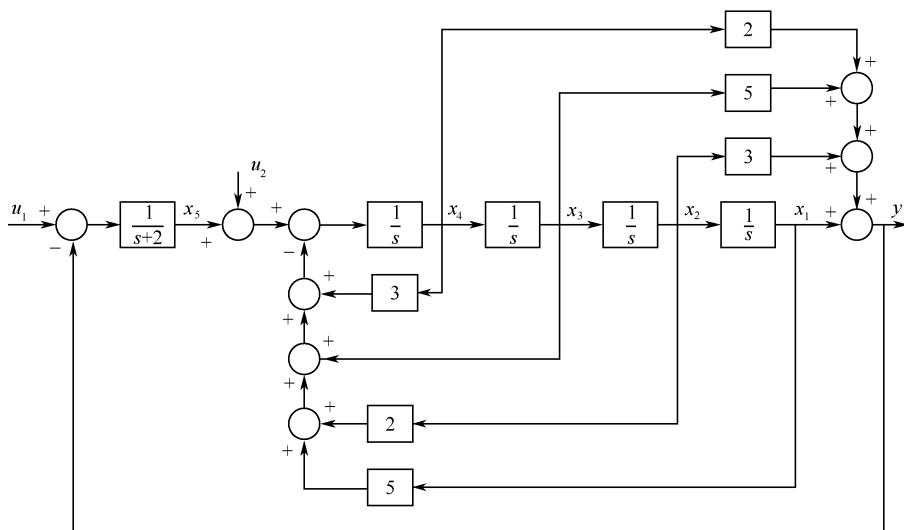
$$\dot{x}_4 = -5x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 + u_2$$

$$X_5(s) = \frac{1}{s+2}[U_1(s) - Y(s)]$$

$$\dot{x}_5 = -2x_5 + u_1 - y = -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 + u_1$$



(a) 系统结构图



(b) 等效结构图

图 1.9 系统结构图

于是,系统状态空间数学模型的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(2) 解法二

由图 1.9(a) 可得

$$Y(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 1}{s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 5} [U_2(s) + X_5(s)] \quad (\text{E1})$$

$$X_5(s) = \frac{1}{s+2} [U_1(s) - Y(s)] \quad (\text{E2})$$

根据能控规范 I 型, 与式(E1) 对应的状态空间模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_2 + x_5) \quad (\text{E3})$$

$$y = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

由式(E2) 可得

$$\dot{x}_5 = -2x_5 - y + u_1 = -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 + u_1 \quad (\text{E5})$$

将式(E3) ~ 式(E5) 组合起来, 结果与上面解法一所得结果相同。

1.2.5 状态空间模型的线性变换

由于状态变量选取的非唯一性, 同一系统可以具有不同的状态空间模型, 这些不同数学模型之间可通过线性变换互相转化。

1. 线性变换

假设系统在 \mathbf{x} 状态向量空间的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

(1) 线性变换方法一

任意选取非奇异矩阵 \mathbf{T} 并如下进行线性变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (1-85)$$

可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (1-86)$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-87)$$

式中, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ 为在新状态空间中的状态向量; $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 和 $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$ 分别为 \mathbf{z} 向量空间的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵。

(2) 线性变换方法二

若按下式进行线性变换

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (1-88)$$

则可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (1-89)$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-90)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$$

对比以上两种线性变换前后的系统矩阵,显然, \mathbf{A} 与 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 或 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ 是相似矩阵,而相似矩阵具有相同的特征值。这表明线性变换不改变系统的特征值。

2. 对角线规范型的实现

假设单输入单输出线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 互异, 与 λ_i 对应的特征向量为 \mathbf{p}_i , 即

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-91)$$

则按式(1-85) 进行线性变换、将系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 化为对角线规范型的变换矩阵为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \quad (1-92)$$

变换后, 新状态空间模型的系统矩阵为

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

3. 约当规范型的实现

假设系统矩阵 \mathbf{A} 有一个 ρ 重特征值 λ_1 , 其余特征值 $\lambda_i (i = \rho + 1, \rho + 2, \dots, n)$ 互异, 则按式(1-85) 进行线性变换、将系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 化为约当规范型的变换矩阵为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \quad (1-93)$$

式中, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ 为 \mathbf{A} 的广义特征向量, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1$$

$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$$

.....

$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_\rho = -\mathbf{p}_{\rho-1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad (i = \rho + 1, \rho + 2, \dots, n)$$

变换后, 新状态空间模型的系统矩阵为

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_{\rho+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

【例 1.9】 假设系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 的系数矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -135 & -162 & -72 & -14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1081}{10125} \\ \frac{59}{225} \\ -\frac{92}{135} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4}[-2835 \quad -2727 \quad -837 \quad -77]$$

试求系统的特征值并据以将系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 化为约当规范型或对角线规范型。

解 (1) 求系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值

\mathbf{A} 的特征值方程为

$$D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^4 + 14\lambda^3 + 72\lambda^2 + 162\lambda + 135 = (\lambda + 3)^3(\lambda + 5) = 0$$

显然, \mathbf{A} 有一个 3 重特征值 $\lambda_1 = -3$ 和单特征值 $\lambda_2 = -5$, 故系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 可化为约当规范型。

(2) 将 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 化为约当规范型

令

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1$$

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$$

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_4 = \lambda_2 \mathbf{p}_4$$

将 $\lambda_1 = -3$ 和 $\lambda_2 = -5$ 代入以上各式, 解方程得

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{27} \\ \frac{5}{27} \\ -\frac{4}{9} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{8}{81} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{27} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{125} \\ \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_4]$ 并按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ 进行线性变换, 得

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}$$

式中

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

1.2.6 状态空间模型与传递函数矩阵之间的关系

假设系统的状态空间模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

在零初始条件下对以上两式进行拉普拉斯(Laplace, 以下简称拉氏)变换, 得

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (1-94)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (1-95)$$

从式(1-94) 求出 $\mathbf{X}(s)$ 并代入式(1-95), 得

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) \quad (1-96)$$

于是, 系统的传递函数矩阵为

$$\begin{aligned} W(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \end{aligned} \quad (1-97)$$

式中, $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 为 $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 为 $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 的行列式, 该行列式称为系统的特征多项式, 特征多项式的根就是系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值, 称为系统的特征值。

系统的传递函数矩阵只与系统结构及其参数有关, 与状态变量无关, 因此具有唯一性或不变性。传递函数矩阵的极点称为系统的极点, 由上式可以看出, 它等于系统的特征值。

对于单输入单输出系统, 传递函数矩阵退化为标量(即有理分式函数)。

1.3 线性时变连续系统的状态空间数学模型

线性时变系统没有传递函数, 其状态空间模型可仿照线性定常系统观测器规范型的推导方法来建立。下面举例说明。

【例 1.10】 假设线性时变系统的微分方程为

$$y^{(3)} + 2\ddot{y} - t\dot{y} + 2y = 2e^{-3t}\ddot{u} + e^{-t}\dot{u} + 3u$$

试建立其状态空间数学模型。

解 仿照线性定常系统能观测规范 I 型状态空间模型的建立方法, 如下选取状态变量

$$x_1 = y \quad (E1)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u \quad (E2)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u \quad (E3)$$

式中, β_0 和 β_1 为待定时变系数。

这样选取状态变量后, 由式(E2) 和式(E3) 直接可得两个状态方程, 即

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_0 u \quad (E4)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_1 u \quad (E5)$$

为求 x_3 的一阶导数, 从式(E1) 开始依次向下进行迭代, 可得

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u = \dot{y} - \beta_0 u \quad (E6)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u = \ddot{y} - \dot{\beta}_0 u - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \quad (E7)$$

对上式求一阶导数, 可得

$$\dot{x}_3 = y^{(3)} - \ddot{\beta}_0 u - 2\dot{\beta}_0 \dot{u} - \beta_0 \ddot{u} - \dot{\beta}_1 u - \beta_1 \dot{u} \quad (\text{E8})$$

由给定微分方程,可得

$$y^{(3)} = -2\ddot{y} + t\dot{y} - 2y + 2e^{-3t}\ddot{u} + e^{-t}\dot{u} + 3u \quad (\text{E9})$$

从式(E6)和式(E7)求出 \dot{y} 和 \ddot{y} 且将其与式(E9)一并代入式(E8),经化简可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & -2x_1 + tx_2 - 2x_3 + (2e^{-3t} - \beta_0)\ddot{u} + (e^{-t} - 2\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 - \beta_1)\dot{u} + \\ & (3 + t\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 - \ddot{\beta}_0 - 2\beta_1 - \dot{\beta}_1)u \end{aligned}$$

为使状态方程不含输入量的导数项,令

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 2e^{-3t} \\ \beta_1 &= e^{-t} - 2\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 = e^{-t} + 8e^{-3t} \end{aligned}$$

再引入系数

$$\beta_2 = 3 + t\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 - \ddot{\beta}_0 - 2\beta_1 - \dot{\beta}_1 = 3 - e^{-t} + (2t + 2)e^{-3t}$$

可得

$$\dot{x}_3 = -2x_1 + tx_2 - 2x_3 + \beta_2 u \quad (\text{E10})$$

式(E4)、式(E5)和式(E10)即为系统的状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)u$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & t & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ e^{-t} + 8e^{-3t} \\ 3 - e^{-t} + (2t + 2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

由式(E1)直接可得输出方程,即

$$y = x_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中, $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$ 。

以上分析过程和结论是仿照线性定常系统能观测规范 I 型的推导方法实现的。毫无疑问,也完全可以仿照能观测规范 II 型的推导方法进行分析并得出不同的结论。

1.4 非线性连续系统的状态空间数学模型

非线性系统有本质非线性和本征非线性两种类型。

其元件具有滞环或饱和等非线性特性的系统称为本质非线性系统。

其微分方程含有非线性项的系统称为本征非线性系统。

对于本质非线性系统,可将线性部分状态空间模型列写出来,对非线性部分进行相应的变量代换。

本征非线性系统的状态空间模型可通过变量代换来建立。

下面举例说明。

1.4.1 本质非线性系统的状态空间模型

【例 1.11】 假设系统的结构如图 1.10(a) 所示,其中,滞环非线性元件的特性如图 1.10(b) 所示,试建立其状态空间模型。

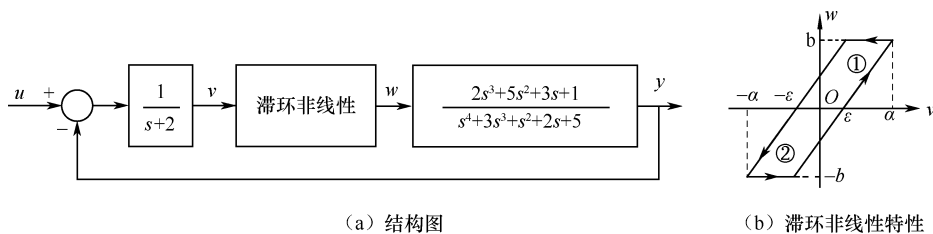


图 1.10 系统结构图

解 由图 1.10(a)、(b) 可以看出,除滞环非线性特性外,系统其余环节具有线性特性,故这是一个本质非线性问题。

变量 w 和 y 间的函数关系为

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 1}{s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 5}$$

根据能控规范 I 型,由上式可得状态 $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 与变量 w 及输出 y 之间的关系,即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

由图 1.10(a) 得

$$V(s) = \frac{1}{s+2} [U(s) - Y(s)]$$

设 $x_5 = v$, 由上式可得

$$\dot{x}_5 = -2x_5 + u - y = -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 + u$$

于是系统状态空间模型的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 0] \mathbf{x}$$

再来确定变量 w 。

根据图 1.10(b), 直线 ① 和直线 ② 的方程分别为

$$w = \frac{b}{a-\epsilon}(v-\epsilon), w = \frac{b}{a-\epsilon}(v+\epsilon)$$

由以上两式和 $x_5 = v$ 及图 1.10(b), 可得

$$w = \begin{cases} \frac{b}{a-\epsilon}(x_5 - \epsilon) & \{(2\epsilon - a < x_5 < a) \cap (\dot{x}_5 > 0)\} \\ -b & \{(-a \leq x_5 \leq 2\epsilon - a) \cap (\dot{x}_5 > 0)\} \\ \frac{b}{a-\epsilon}(x_5 + \epsilon) & \{(-a < x_5 < a - 2\epsilon) \cap (\dot{x}_5 < 0)\} \\ b & \{(a - 2\epsilon \leq x_5 \leq a) \cap (\dot{x}_5 < 0)\} \end{cases}$$

1.4.2 本征非线性系统的状态空间模型

【例 1.12】 假设系统的微分方程为

$$\ddot{y} + ay \dot{y} + by^2 = u$$

试建立其状态空间模型。

解 因微分方程含有输出量 y 的非线性项,故这是一个本征非线性问题。如下选取状态变量

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

对以上两式求导数并将给定微分方程代入,可得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -by^2 - ay \dot{y} + u = -bx_1^2 - ax_1x_2 + u$$

输出方程为

$$y = x_1$$

1.5 线性离散系统的状态空间数学模型

1.5.1 基本概念

1. 差分方程

差分方程是时域中描述线性离散系统的输入量与输出量之间关系的数学模型。差分方程有前向差分方程和后向差分方程两种类型。

n 阶前向差分方程的一般形式为

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned} \quad (1-98)$$

式中:

$y(k+i) = y[(k+i)T]$ ($i = 0, 1, \cdots, n$) 为系统在第 $(k+i)T$ 采样时刻的输出序列值。其中 T 为采样周期,通常将其省略; k 为采样节点序数(亦称采样步数)。

$u(k+i) = u[(k+i)T]$ ($i = 0, 1, \cdots, n$) 为系统在第 $(k+i)T$ 采样时刻的输入序列值。

a_i ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 和 b_i ($i = 0, 1, \cdots, n$) 均为与系统结构和参数有关的系数。对于线性定常系统,这些系数为常数;对于线性时变系统,这些系数是采样节点时间 kT 的函数。

在上式中,若取如下变量代换

$$j = k + n$$

可得 n 阶后向差分方程,即

$$\begin{aligned} y(j) + a_{n-1}y(j-1) + \cdots + a_1y(j-n+1) + a_0y(j-n) \\ = b_nu(j) + b_{n-1}u(j-1) + \cdots + b_1u(j-n+1) + b_0u(j-n) \end{aligned} \quad (1-99)$$

出于习惯,通常采样节点序数符号用 k 表示,为此把上式中的符号“ j ”再换成“ k ”,可得 n 阶后向差分方程的一般表达式,即

$$\begin{aligned} y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_1y(k-n+1) + a_0y(k-n) \\ = b_nu(k) + b_{n-1}u(k-1) + \cdots + b_1u(k-n+1) + b_0u(k-n) \end{aligned} \quad (1-100)$$

显然,式(1-98)与式(1-100)是同一系统的数学模型,只不过前者采用前向差分、而后者采用后向差分罢了。

2. 脉冲传递函数

脉冲传递函数是复域中描述单输入单输出线性定常离散系统的输入量与输出量之间关系的数学模型,定义为在零初始条件下输出量的 z 变换与输入量的 z 变换之比。

假设式(1-100)中的所有系数为常数,在零初始条件下对其进行 z 变换,可得

$$\begin{aligned} Y(z) + a_{n-1}z^{-1}Y(z) + \cdots + a_1z^{-(n-1)}Y(z) + a_0z^{-n}Y(z) \\ = b_nU(z) + b_{n-1}z^{-1}U(z) + \cdots + b_1z^{-(n-1)}U(z) + b_0z^{-n}U(z) \end{aligned}$$

于是,系统的脉冲传递函数为

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_nz^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} \quad (1-101)$$

将线性定常离散系统的脉冲传递函数式(1-101)与线性定常连续系统的传递函数式(1-40)进行比较,显然,二者在形式上完全相同。

3. 状态空间模型

离散信号不连续,其导数不存在,因此,离散系统的状态方程不能用变量的导数关系来描述,须用差分关系来描述。

线性离散系统的状态方程描述的是第 $k+1$ 步采样的状态向量 $\mathbf{x}(k+1)$ 与第 k 步采样的状态向量 $\mathbf{x}(k)$ 及输入向量 $\mathbf{u}(k)$ 之间的关系,输出方程描述的是第 k 步采样的系统输出向量 $\mathbf{y}(k)$ 与状态向量 $\mathbf{x}(k)$ 及输入向量 $\mathbf{u}(k)$ 之间的关系。

线性时变离散系统动态方程的一般向量表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (1-102)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (1-103)$$

式中,系数矩阵 $\mathbf{A}(k)$ 、 $\mathbf{B}(k)$ 、 $\mathbf{C}(k)$ 和 $\mathbf{D}(k)$ 是采样步数 k 的函数。

线性定常离散系统的系数矩阵与采样步数 k 无关,是常数矩阵,故动态方程的一般向量表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (1-104)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (1-105)$$

1.5.2 线性定常离散系统的状态空间模型

1. 能观测规范型

假设系统的差分方程为

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned}$$

根据差分方程,可推导出两种能观测规范型。

(1) 能观测规范 I 型

仿照连续系统状态变量的选取方法,定义

$$x_1(k) = y(k) - b_nu(k) \quad (1-106)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) - \beta_0u(k) \quad (1-107)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1) - \beta_1 u(k) \quad (1-108)$$

.....

$$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - \beta_{n-2} u(k) \quad (1-109)$$

式中, $\beta_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$ 为待定系数。

经迭代推导, 可得离散系统能观测规范 I 型 $\sum (A_{o1}, C_{o1})$, 即

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{o1} \mathbf{x}(k) + b_{o1} u(k) \quad (1-110)$$

$$y(k) = C_{o1} \mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (1-111)$$

式中

$$A_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_{o1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$C_{o1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \quad D = b_n$$

其中, $\beta_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 按式(1-32) 计算。

(2) 能观测规范 II 型

仿照连续系统状态变量的选取方法, 定义

$$x_n(k) = y(k) - b_n u(k) \quad (1-112)$$

$$x_{n-1}(k) = x_n(k+1) + a_{n-1} x_n(k) - \beta_{n-1} u(k) \quad (1-113)$$

.....

$$x_2(k) = x_3(k+1) + a_2 x_n(k) - \beta_2 u(k) \quad (1-114)$$

$$x_1(k) = x_2(k+1) + a_1 x_n(k) - \beta_1 u(k) \quad (1-115)$$

式中, $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 为待定系数。

经迭代推导, 可得离散系统能观测规范 II 型 $\sum (A_{o2}, C_{o2})$, 即

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{o2} \mathbf{x}(k) + b_{o2} u(k) \quad (1-116)$$

$$y(k) = C_{o2} \mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (1-117)$$

式中

$$A_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_{o2} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$C_{o2} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad D = b_n$$

其中, $\beta_i = b_i - a_i b_n (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 。

2. 能控规范型

假设系统的脉冲传递函数为

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

仿照连续系统能控规范型状态空间模型的推导方法, 不难建立离散系统的两种能控规

范型。

(1) 能控规范 I 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{c1} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_{c1} u(k) \quad (1-118)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_{c1} \mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (1-119)$$

式中

$$\mathbf{A}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad D = b_n$$

其中, $\beta_i = b_i - a_i b_n (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 。

(2) 能控规范 II 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{c2} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_{c2} u(k) \quad (1-120)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_{c2} \mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (1-121)$$

式中

$$\mathbf{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{c2} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-2} \quad \beta_{n-1}] \quad D = b_n$$

其中, $\beta_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 按式(1-32) 计算。

1.6 线性定常系统状态空间模型的 MATLAB 实现

矩阵实验室 MATLAB 是当今世界上最优秀的数值计算软件之一,内嵌的控制工程计算与仿真工具箱也是控制领域应用最为广泛的软件之一。

MATLAB 功能强大,适用范围广泛,几乎具备所有科学与技术计算所需要的功能。例如能进行矩阵、复数、插值与数值微商、微分与积分等运算,能求解代数方程、微分方程和最优化问题,能进行系统仿真,能绘制各种曲线图,等等。

MATLAB 提供了丰富的库函数,既有常用的基本库函数,又有种类齐全的专用库函数。其数据基本单元是复数矩阵,操作数组、向量和矩阵就像操作数一样简单,而且其维数可根据需要在计算过程中扩张。

在 MATLAB 中,命令语句的编辑、编译、连接、执行、调试等过程是同步进行的。每输入一条命令语句,输入回车符后,MATLAB 立即进行编译、链接和运行。用户编写的源程序如果以 .m 为后缀,可与库函数一样调用而不必编译和链接,如果有错,会即时发出提示。

MATLAB 提供了与其功能相匹配的各种界面窗口,这些窗口可根据用户选择重叠悬浮于界面或锁定在界面,可随时打开或关闭。最为重要的界面窗口是命令窗口 Command Window。该窗口是人与 MATLAB 进行交互运作的窗口,用于向 MATLAB 输入各种指令和

MATLAB 完成指令后输出结果,如图 1.11 所示。

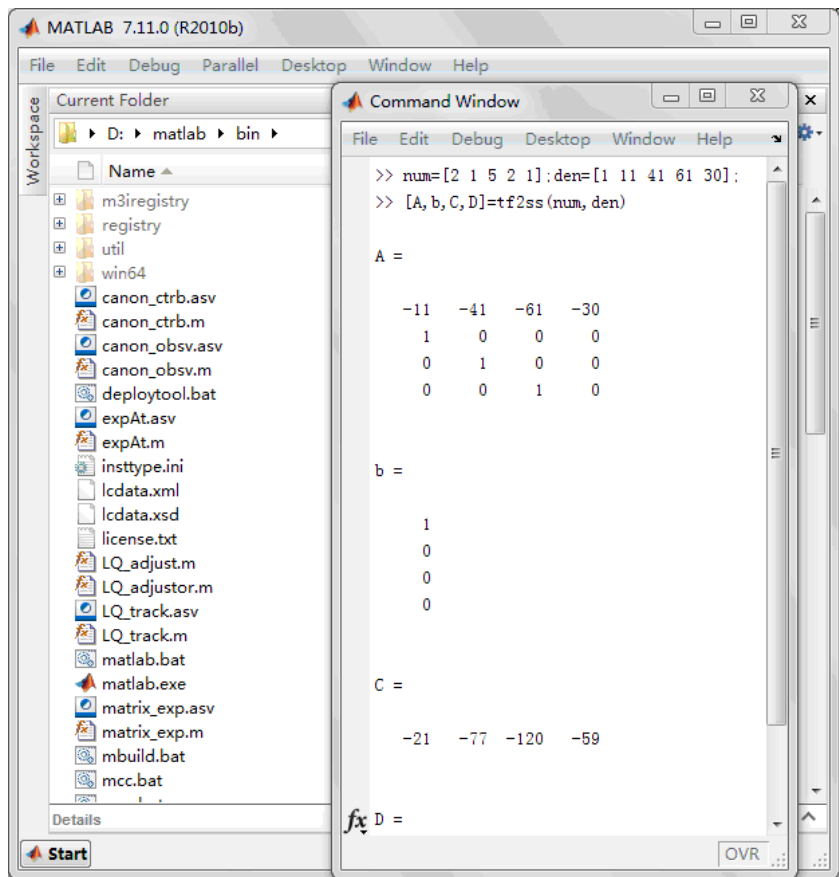


图 1.11 MATLAB 系统界面及悬浮的 Command Window 窗口

从图 1.11 可以看出,在 Command Window 界面窗口,有几行是以符号“>>”打头的,该符号是 MATLAB 等待输入命令的符号,符号后面的内容是用户输入的指令信息。在同一行里,用户可以输入多个命令,每个命令之间用符号“;”分隔。一旦命令输入完成并直接输入回车符,MATLAB 即进入计算状态,随后输出结果。

MATLAB 的应用方法非本书所能涵盖,本书只对应用到的 MATLAB 命令语句作简要说明。

1.6.1 数学模型的 MATLAB 表示法

1. 传递函数

在 MATLAB 中,有理分式函数用两个一维数组表示,分子多项式可用名为 num 的数组表示,num 的元素为分子多项式各次幂的系数;分母多项式可用名为 den 的数组表示,den 的元素为分母多项式各次幂的系数。

连续系统传递函数和离散系统脉冲传递函数的一般表达式为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

在 MATLAB 中,以上两式可表示为

$$\begin{aligned}\text{num} &= [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_1 \quad b_0] \\ \text{den} &= [1 \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]\end{aligned}$$

这里的 num 和 den 是用户定义的数组名。既然是用户定义的,不言而喻,任何英文字母及其带下划线和数字的字符串均可当作数组名。

2. 传递函数转换状态空间模型

在 MATLAB 中,用符号“tf”表示传递函数(即 transfer-function 的首写字符),用符号“ss”表示状态空间(即 state-space 的首写字符)。将传递函数转换为状态空间模型的命令语句是 tf2ss,其调用格式是:

$$[A \ B \ C \ D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

执行该命令后,输出的是状态空间模型的系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 。

3. 状态空间模型转换传递函数

将状态空间模型转换为传递函数的命令语句是 ss2tf,其调用格式是:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A \ B \ C \ D)$$

执行该命令后,输出的是传递函数分子和分母多项式的系数数组 num 和 den。

4. 状态空间模型转换约当规范型

把系统矩阵 A 化为约当规范型的命令语句是 jordan,其调用格式是:

$$[T, J] = \text{jordan}(A)$$

其中, J 是 A 的约当规范型矩阵, T 是把 A 变换成 J 的线性变换矩阵,它们之间的关系为

$$J = T^{-1}AT$$

【例 1.13】 假设系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s^4 + 91s^3 + 615s^2 + 1825s + 2000}{s^4 + 18s^3 + 120s^2 + 350s + 375}$$

试求状态空间模型及其约当规范型。

解 (1) 求状态空间模型

在 MATLAB Command Window 窗口输入传递函数的分子和分母多项式系数数组,再用传递函数转换状态空间模型的命令语句, MATLAB 立即输出状态空间模型的系数矩阵,具体人机交互过程及数据如表 1.1 所示。

该系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}$$

式中,各系数矩阵如表 1.1 所示。

(2) 求约当规范型

运用 MATLAB 求约当规范型的人机交互过程及数据如表 1.2 所示。该系统的约当规范型为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Jz} + \bar{\mathbf{b}}u \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{Du}$$

实现约当规范型的变换为

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad \mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

式中,各系数矩阵如表 1.2 所示。因在 MATLAB 中无法写出带上划线的字符,故表中用右下划线代替上划线。

表 1.1 传递函数转换状态空间模型

```

Command Window
File Edit Debug Desktop
>> num=[5 91 615 1825 2000];
>> den=[1 18 120 350 375];
>> [A,b,C,D]=tf2ss(num,den)

A =

    -18    -120    -350    -375
         1         0         0         0
         0         1         0         0
         0         0         1         0

b =

         1
         0
         0
         0

C =

         1        15        75       125

D =

         5
  
```

表 1.2 状态空间模型转换约当规范型

```

Command Window
File Edit Debug Desktop
>> [I,J]=jordan(sym(A))

I =

    -27/8, 125/2, -25/4, 35/8
     9/8, -25/2, -5/4, -9/8
    -3/8,  5/2,  3/4,  3/8
     1/8, -1/2, -1/4, -1/8

J =

    -3,  0,  0,  0
     0, -5,  1,  0
     0,  0, -5,  1
     0,  0,  0, -5

>> b_=inv(I)*b

b_ =

         1
         0
         0
         1

>> C_=C*I

C_ =

    [ 1, 0, 0, 0]
  
```

由表 1.2 可以看出,在状态空间模型转换计算中,除了jordan命令外,还应用了sym和inv这两个 MATLAB 命令语句,其意义如下:

- sym—— 定义符号命令语句,sym(A) 表示将矩阵 **A** 转换成符号型矩阵;
- inv—— 求逆矩阵命令语句,inv(T) 表示求矩阵 **T** 的逆矩阵。

1.6.2 实现能控规范型的 MATLAB 编程及计算

运用 MATLAB 实现能控规范 I 型和 II 型状态空间模型的通用程序分别列于表 1.3 和表 1.4。这两个程序应用的 MATLAB 命令语句及其意义如下。

表 1.3 实现能控规范 I 型状态空间模型的 MATLAB 通用程序

```

D:\matlab\bin\ss_ctrbl.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [ Ac1,bc1,Cc1,D ] = ss_ctrbl( num,den)
2 % den和num分别为传递函数分母和分子多项式的系数数组
3 an=numel(den);bn=numel(num);beta=[];
4 if(bn<an)
5     a_b=an-bn;
6     num=[zeros(1,a_b) num];
7 end
8 den_up=rot90(den); %传函分母多项式系数按升幂排列
9 num_up=rot90(num); %传函分子多项式系数按升幂排列
10 n=an-1;
11 for i=1:n
12     beta(i)=num_up(i)-den_up(i)*num_up(n+1);
13 end
14 Ac1=zeros(n-1,n);bc1=zeros(n,1);
15 for i=1:n-1
16     Ac1(i,i+1)=1;
17 end
18 Ac1=[Ac1;-den_up(1:n)'];bc1(n,1)=1;Cc1=beta;D=num_up(n+1);
19 end
    
```

表 1.4 实现能控规范 II 型状态空间模型的 MATLAB 通用程序

```

D:\matlab\bin\ss_ctrb2.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop
1 function [ Ac2,bc2,Cc2,D ] = ss_ctrb2( num,den)
2 % den和num分别为传递函数分母和分子多项式的系数数组
3 an=numel(den);bn=numel(num);n=an-1;
4 if(bn<an)
5     a_b=an-bn;
6     num=[zeros(1,a_b) num];
7 end
8 p=rot90(den)'; %分母多项式系数按升幂排列
9 Ac2=zeros(n,n-1);
10 for i=1:n-1
11     Ac2(i+1,i)=1;
12 end
13 Ac2=[Ac2 -p(1:n)']; % 系统矩阵Ac2
14 bc2=zeros(n,1);bc2(1:1)=1; % 控制矩阵bc2
15 A_poly=p;
16 for i=1:n
17     p=[p(2:n+1) 0];
18     A_poly=[p;A_poly];
19 end
20 beta=inv(A_poly)*num'; % 计算式(1-32b)
21 Cc2=beta(2:n+1)';D=beta(1);
22 end
    
```

- %—— 定义注释命令语句。在一行程序指令中,凡以符号“%”引领的文字都是注释。

- function—— 定义函数的命令语句。表 1.3 程序定义了一个名为 ss_ctrbl 的函数,表 1.4 程序定义了一个名为 ss_ctrb2 的函数,两函数的形参量均为传递函数(或脉冲传递函数)分子和分母多项式系数数组 num 和 den。

- numel—— 求数组元素个数命令语句,numel(den) 表示求数组 den 的元素个数。

- '—— 转置数组或矩阵的命令符号。

- A_poly = [p;A_poly] 表示将 p 作为第一行加入 A_poly。

- zeros—— 产生元素为 0 的数组或矩阵的命令语句,Ac1 = zeros(n-1,n) 表示产生 $(n-1) \times n$ 维的 0 矩阵 Ac1。

- rot90—— 旋转数组或矩阵的命令语句。 $p = \text{rot90}(\text{den})'$ 表示将数组 den 旋转 90° ,使其成为元素按倒序排列的列向量并转置后赋值于 p。

- $p = [p(2:n+1) \ 0]$ 表示从 p 中提取第 2 到第 $n+1$ 个元素并在其列尾增加 0 元素后赋值于 p。

- for...end—— 循环语句。

- if ... end 或 if ... elseif ... end—— 条件语句。

MATLAB 的循环语句和条件语句与一般高级程序语言的循环语句和条件语句类似。

【例 1.14】 求例 1.13 系统的两种能控规范型。

解 在 Command Window 人机交互窗口,输入传递函数分子和分母多项式系数数组 num 和 den 后,再调用表 1.3 程序函数 ss_ctrbl 和表 1.4 程序函数 ss_ctrb2,MATLAB 立即完成计算并在该窗口输出两种能控规范型的系数矩阵。具体人机交互计算过程和数据分别如表 1.5 和表 1.6 所示。

表 1.5 实现能控 I 型的 MATLAB 计算过程

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> num=[5 91 615 1825 2000];
>> den=[1 18 120 350 375];
>> [Ac1,bc1,Cc1,D] = ss_ctrbl( num,den)

Ac1 =

     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
    -375   -350   -120   -18

bc1 =

     0
     0
     0
     1

Cc1 =

    125    75    15     1

D =

     5
  
```

表 1.6 实现能控 II 型的 MATLAB 计算过程

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> num=[5 91 615 1825 2000];
>> den=[1 18 120 350 375];
>> [Ac2,bc2,Cc2,D] = ss_ctrb2( num,den)

Ac2 =

     0     0     0   -375
     1     0     0   -350
     0     1     0   -120
     0     0     1   -18

bc2 =

     1
     0
     0
     0

Cc2 =

     1    -3     9   -27

D =

     5
  
```

习 题 1

1-1 图 1.12 所示为质量-弹簧-阻尼系统,试建立以激励力 $p(t)$ 为输入量、分别以位移 $y(t)$ 和 $z(t)$ 为输出量的系统状态空间模型。

1-2 一个由电阻、电容和电感元件组成的四端无源网络如图 1.13 所示,试建立以输入电压 u_i 为输入量、输出电压 u_o 为输出量的状态空间模型。

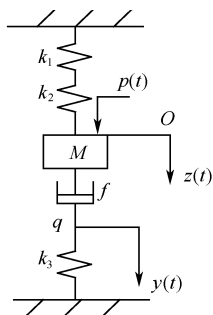


图 1.12 质量-弹簧-阻尼系统

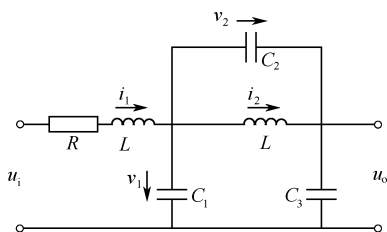


图 1.13 四端无源网络

1-3 试根据下列微分方程建立状态空间模型。

$$(1) 2y^{(4)} + 20y^{(3)} + 6\ddot{y} + 10\dot{y} + 2y = 2u^{(3)} + 6\ddot{u} - 130\dot{u} - 12u$$

$$(2) y^{(3)} + 5\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 2u^{(3)} + 10\ddot{u} + 6\dot{u} + u$$

$$(3) y^{(3)} + t\ddot{y} + 3\dot{y} + 2e^{-3t}y = 5\ddot{u} + 8\dot{u} + u$$

$$(4) \frac{1}{y}y^{(3)} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 8u$$

1-4 试根据下列传递函数建立状态空间模型并将其化为约当规范型。

$$(1) W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 15 \frac{(s-2)(s+5)}{(s+1)(s+3)^3}$$

$$(2) W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(s-2)^2(s+5)}{(s+1)(s+3)^2(s+6)}$$

1-5 试根据下列系统结构图建立状态空间模型。

(1) 系统结构图如图 1.14 所示。

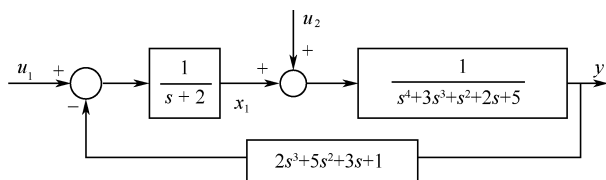


图 1.14 系统结构图

(2) 系统结构图如图 1.15 所示。

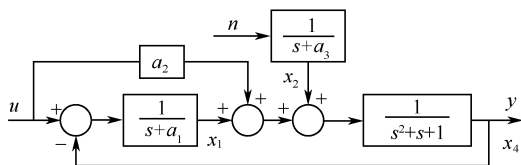


图 1.15 系统结构图

(3) 系统结构图如图 1.16 所示。

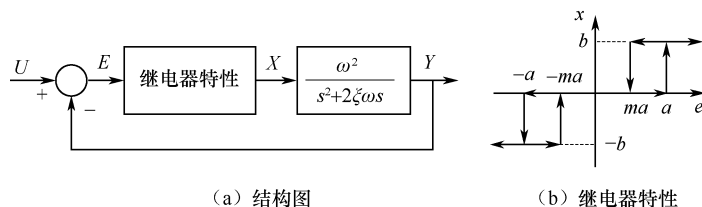


图 1.16 系统结构图

1-6 试根据下列差分方程建立状态空间模型。

$$(1) \quad y(k+3) + 11y(k+2) + 34y(k+1) + 24y(k) \\ = u(k+3) + 5u(k+2) - 4u(k+1) - 20u(k)$$

$$(2) \quad 2y(k+4) + 30y(k+3) + 156y(k+2) + 320y(k+1) + 192y(k) \\ = u(k+3) + 17u(k+2) + 80u(k+1) + 100u(k)$$

1-7 试根据下列脉冲传递函数建立状态空间模型。

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 10 \frac{(z+2)^2(z+5)}{(z+1)(z+3)^2(z+6)}$$

第2章 控制系统的运动分析

内容提示:本章论证控制系统的运动分析方法,包括定常连续和离散、时变连续和离散4种线性系统自由运动、状态转移矩阵、受控运动及系统运动分析的MATLAB编程与计算等。

任何系统在外激励作用下必然产生运动,其状态和输出必然发生变化。

在输入量的作用下系统状态和输出随时间变化的规律称为系统的时间响应,系统运动分析就是求时间响应。

系统的输出量与状态变量及输入量之间的关系只是一种线性比例关系,在确定了状态变量后,输出量随即可定。因此,系统运动分析的关键是解状态方程。自然这也是本章论证的重点。

2.1 线性定常连续系统的运动分析

2.1.1 系统状态自由运动

系统状态自由运动是在没有外部激励的情况下由不为零的初始状态引发的状态运动,在数学上,就是齐次微分方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2-1)$$

在初始条件 $\mathbf{x}(0)$ 下的解 $\mathbf{x}(t)$ 。

线性定常系统微分方程的求解方法有待定系数直接解法和拉氏变换间接解法两种。下面分别进行论证。

1. 直接解法——待定系数法

待定系数法的技术路线是:

第1步,假设微分方程的预解,用待定系数反映事先不确定的因素;

第2步,将假设的预解代入微分方程并确定待定系数;

第3步,将确定的待定系数回代入预解。

当然这种分步法并没有严格规定,毫无疑问,可以三步并作两步走。

下面遵循这一技术路线进行分析。

假设齐次微分方程(2-1)的预解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_n t^n + \cdots \quad (2-2)$$

其中, $\mathbf{b}_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 为与 \mathbf{x} 同维的待定系数向量。

将上式代入式(2-1),可得

$$\begin{aligned} \text{左边} = \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + n\mathbf{b}_n t^{n-1} + \cdots \\ &= \text{右边} = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_n t^n + \cdots) \end{aligned}$$

比较等式两边同次幂的系数并依次向下进行迭代,可得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 b_0$$

.....

$$b_n = \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n b_0$$

根据式(2-2),当 $t = 0$ 时, $b_0 = \mathbf{x}(0)$ 。将以上各项系数代入式(2-2),可得

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n + \cdots \right) \mathbf{x}(0) \quad (2-3)$$

上式右边的级数是矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的展开式,即

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n + \cdots \quad (2-4)$$

于是,式(2-3)又可写为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (2-5a)$$

上式表明,由 $t = 0$ 时刻的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 引发的系统状态运动为 $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$ 。因 $e^{\mathbf{A}t}$ 是时间的函数,故 $\mathbf{x}(t)$ 随着时间的延续不断变化,这种变化的几何意义是状态向量的矢端点在状态空间 \mathbf{R}^n 不断转移。因此将矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 称为状态转移矩阵,并用符号 $\Phi(t)$ 表示,即

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} \\ \mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2-5b)$$

2. 间接解法 —— 拉氏变换法

拉氏变换法的技术路线是:

第1步,对微分方程进行拉氏变换;

第2步,求出微分方程的复域解;

第3步,对复域解进行拉氏逆变换。

下面遵循这一技术路线进行分析。

对式(2-1)进行拉氏变换,得

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

合并同类项,可得复域解,即

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (2-6)$$

令

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2-7)$$

可得

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s) \mathbf{x}(0)$$

对上式进行拉氏逆变换,得

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[\Phi(s)] \mathbf{x}(0) \quad (2-8)$$

将上式与式(2-5b)进行比较,易得

$$\Phi(s) = L[\Phi(t)] \quad (2-9a)$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] \quad (2-9b)$$

2.1.2 状态转移矩阵

1. 状态转移矩阵的性质

(1) 初值

由式(2-4) 直接可得

$$\Phi(0) = I \quad (2-10)$$

(2) 可求导数

对式(2-4) 关于时间 t 求导数并提取公因子, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} + \frac{1}{n!} A^{n+1} t^n \cdots \\ &= A \left(I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \cdots \right) \\ &= A \Phi(t) \end{aligned} \quad (2-11a)$$

在上式中, 若右提矩阵 A , 可得

$$\dot{\Phi}(t) = \Phi(t) A \quad (2-11b)$$

因 $\Phi(0) = I$, 故

$$\dot{\Phi}(0) = A \quad (2-12)$$

(3) 可分解

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t) \Phi(\tau) = \Phi(\tau) \Phi(t) \quad (2-13a)$$

$$\Phi(t - \tau) = \Phi(t) \Phi(-\tau) = \Phi(-\tau) \Phi(t) \quad (2-13b)$$

这只需把式(2-4) 代入上式, 即可得证。

可分解性的另一表达形式为

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0) \quad (2-14)$$

(4) 可逆

$$\Phi(t - t) = \Phi(0) = I$$

由可分解性得

$$\Phi(t - t) = \Phi(t) \Phi(-t)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \Phi(t) \Phi(-t) &= I \\ \Phi^{-1}(t) &= \Phi(-t) \end{aligned} \quad (2-15)$$

应用状态转移矩阵的可逆性和可分解性, 容易推导出系统状态变化更一般的表达式。

由式(2-5b) 可得

$$x(t_0) = \Phi(t_0) x(0)$$

对上式两边左乘 $\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(-t_0)$, 得

$$x(0) = \Phi(-t_0) x(t_0) \quad (2-16)$$

将该式代入式(2-5b) 并应用状态转移矩阵的可分解性, 得

$$x(t) = \Phi(t) x(0) = \Phi(t) \Phi(-t_0) x(t_0) = \Phi(t - t_0) x(t_0) \quad (2-17)$$

这便是由任意 t_0 时刻不为 0 的初始状态 $x(t_0)$ 引发的系统状态自由运动的一般表达式。由该式可得

$$x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0) x(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

可见,系统状态转移是分步进行的,即 $\mathbf{x}(t_0) \rightarrow \mathbf{x}(t_1) \rightarrow \mathbf{x}(t_2) \cdots$

(5) 可乘方

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt) \quad (2-18)$$

这只需应用可分解性即可证明。

2. 状态转移矩阵的计算

(1) 幂级数计算法

按式(2-4) 计算。

(2) 拉氏变换计算法

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (2-19)$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] \quad (2-20)$$

【例 2.1】 试求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

解

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s+5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} & \frac{1}{(s+5)^2} & \frac{1}{(s+5)^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+5} & \frac{1}{(s+5)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \\ \Phi(t) &= L^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & te^{-5t} & \frac{1}{2}t^2e^{-5t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 应用凯莱 - 哈密顿(Cayley-Hamilton) 定理计算

【凯莱 - 哈密顿定理】 任何方阵满足其特征方程。

按照此定理,如果方阵 \mathbf{A} 的特征值方程为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0 \quad (2-21)$$

那么

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = 0 \quad (2-22)$$

由式(2-22)可得

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I} \quad (2-23)$$

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} = -a_{n-1}\mathbf{A}^n - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_1\mathbf{A}^2 - a_0\mathbf{A} \quad (2-24)$$

将式(2-23)代入式(2-24),得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I}) - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_1\mathbf{A}^2 - a_0\mathbf{A} \\ &= (a_{n-1}^2 - a_{n-2})\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)\mathbf{A} + a_{n-1}a_0\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2-25)$$

以此类推,可得更为一般的表达式

$$\mathbf{A}^{n+i} = \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \beta_1\mathbf{A} + \beta_0\mathbf{I} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2-26)$$

式中, $\beta_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为常数。

以上分析表明, $\mathbf{A}^{n+i} (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 可用 $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}$ 的线性组合来表示。

将式(2-23) ~ 式(2-26)代入式(2-4),可得

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{A}^{n-1}t^{n-1} + \\ &\quad \frac{1}{n!}(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I})t^n + \\ &\quad \frac{1}{(n+1)!}[(a_{n-1}^2 - a_{n-2})\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)\mathbf{A} + a_{n-1}a_0\mathbf{I}]t^{n+1} + \cdots \end{aligned} \quad (2-27)$$

再按 $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}$ 的同次幂合并同类项,可得

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = d_0(t)\mathbf{I} + d_1(t)\mathbf{A} + \cdots + d_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (2-28)$$

式中, $d_i(t) (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为对式(2-27)按 \mathbf{A} 幂合并同类项后的时间函数。显然,只要确定了这些函数,那么 $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ 立即可定。为此下面转而研究 $d_i(t)$ 的计算方法。

① 系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 互异的情形

根据凯莱-哈密顿定理,方阵 \mathbf{A} 与其特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 可以互换。据此,将式(2-28)中的 \mathbf{A} 用 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 置换,可得

$$e^{\lambda_i t} = d_0 + d_1\lambda_i + \cdots + d_{n-1}\lambda_i^{n-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (2-29a)$$

整理成向量形式,可得

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-29b)$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

② 系统矩阵 \mathbf{A} 有重特征值 λ_ρ 的情形

当 \mathbf{A} 的特征值有一个 ρ 重特征值 λ_ρ 、其余特征值 $\lambda_i (i = \rho+1, \cdots, n)$ 互异时,用特征值置换式(2-28)中的 \mathbf{A} ,得

$$e^{\lambda_i t} = d_0 + d_1 \lambda_i + \cdots + d_{n-1} \lambda_i^{n-1} \quad (i = \rho + 1, \cdots, n) \quad (2-31)$$

$$e^{\lambda_\rho t} = d_0 + d_1 \lambda_\rho + \cdots + d_{n-1} \lambda_\rho^{n-1} \quad (2-32)$$

式(2-31)和式(2-32)组合起来共有 $n - \rho + 1$ 个方程,要唯一确定 $d_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$,尚缺 $\rho - 1$ 个方程。为此,对式(2-32)关于重特征值 λ_ρ 求一阶、二阶直至 $\rho - 1$ 阶导数,可得 $\rho - 1$ 个方程。将这 $\rho - 1$ 个方程与式(2-31)和式(2-32)联立起来,解 n 元一次方程组便可确定 $d_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 。

$d_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 确定后,将其回代到式(2-28),即可确定状态转移矩阵。

【例 2.2】 应用凯莱 - 哈密顿定理求解例 2.1。

解 显然, \mathbf{A} 为约当矩阵,其特征值有单特征值 $\lambda_1 = -3$ 和三重特征值 $\lambda_2 = -5$ 。

假设

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = d_0 \mathbf{I} + d_1 \mathbf{A} + d_2 \mathbf{A}^2 + d_3 \mathbf{A}^3 \quad (E1)$$

用 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 置换上式中的 \mathbf{A} , 得

$$e^{\lambda_1 t} = d_0 + d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_1^2 + d_3 \lambda_1^3 \quad (E2)$$

$$e^{\lambda_2 t} = d_0 + d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_2^2 + d_3 \lambda_2^3 \quad (E3)$$

因 $\lambda_2 = -5$ 是三重特征值,为唯一确定 $d_i (i = 0, 1, 2, 3)$,须通过对式(E3)关于 λ_2 求一阶和二阶导数补充 2 个方程,即

$$t e^{\lambda_2 t} = d_1 + 2d_2 \lambda_2 + 3d_3 \lambda_2^2 \quad (E4)$$

$$t^2 e^{\lambda_2 t} = 2d_2 + 6d_3 \lambda_2 \quad (E5)$$

将 $\lambda_1 = -3$ 代入式(E2)、 $\lambda_2 = -5$ 代入式(E3) ~ 式(E5),可得

$$e^{-3t} = d_0 - 3d_1 + 9d_2 - 27d_3 \quad (E6)$$

$$e^{-5t} = d_0 - 5d_1 + 25d_2 - 125d_3 \quad (E7)$$

$$t e^{-5t} = d_1 - 10d_2 + 75d_3 \quad (E8)$$

$$t^2 e^{-5t} = 2d_2 - 30d_3 \quad (E9)$$

联立式(E6) ~ 式(E9)并解方程,得

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -5 & 25 & -125 \\ 0 & 1 & -10 & 75 \\ 0 & 0 & 2 & -30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{-5t} \\ t e^{-5t} \\ t^2 e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{125}{8} e^{-3t} - \frac{75}{4} t^2 e^{-5t} - \frac{105}{4} t e^{-5t} - \frac{117}{8} e^{-5t} \\ \frac{75}{8} e^{-3t} - \frac{55}{4} t^2 e^{-5t} - \frac{71}{4} t e^{-5t} - \frac{75}{8} e^{-5t} \\ \frac{15}{8} e^{-3t} - \frac{13}{4} t^2 e^{-5t} - \frac{15}{4} t e^{-5t} - \frac{15}{8} e^{-5t} \\ \frac{1}{8} e^{-3t} - \frac{1}{4} t^2 e^{-5t} - \frac{1}{4} t e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (E10)$$

将式(E10)中的 d_0 、 d_1 、 d_2 和 d_3 代入式(E1),经化简可得

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = d_0 \mathbf{I} + d_1 \mathbf{A} + d_2 \mathbf{A}^2 + d_3 \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & t e^{-5t} & \frac{1}{2} t^2 e^{-5t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} & t e^{-5t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

(4) 对角线矩阵和约当矩阵的指数函数

$$\textcircled{1} \text{ 对角线矩阵 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

$$\textcircled{2} \text{ 约当矩阵 } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(m-2)!} t^{m-2} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

$$\textcircled{3} \text{ 约当矩阵 } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_{m+1} & 0 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_1 t} & \ddots & \vdots & & \\ & & \ddots & t e^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & & & e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & & & & e^{\lambda_{m+1} t} & 0 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

根据上式,可直接写出例 2.1 的矩阵指数函数而无须计算。

(5) 相似变换算法

根据第 1 章状态空间模型的线性变换,经 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ 变换后,齐次方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}$$

式中, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 与 \mathbf{A} 是相似矩阵,具有相同特征值。

e^{At} 与 $e^{\bar{A}t}$ 之间存在如下关系

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} &= e^{(T^{-1}AT)t} = I + T^{-1}ATt + \frac{1}{2!}(T^{-1}AT)^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(T^{-1}AT)^nt^n + \cdots \\ &= T^{-1}(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots)T \\ &= T^{-1}e^{At}T \end{aligned} \quad (2-36a)$$

$$e^{At} = Te^{\bar{A}t}T^{-1} \quad (2-36b)$$

2.1.3 系统状态受控运动

系统状态受控运动是由输入量强迫发生的状态运动,在数学上,就是在给定输入向量 $u(t)$ 和初始状态向量 $x(0)$ 的条件下,非齐次微分方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-37)$$

的解 $x(t)$ 。

1. 直接解法 —— 常数变易法

常数变易法的技术路线是:

第1步,将齐次微分方程的解的常数参量用变参量代替并作为非齐次微分方程的预解;

第2步,将预解代入非齐次微分方程并确定变参量;

第3步,将确定的变参量回代入预解。

下面进行详细论证。

(1) 假设非齐次方程预解

因与式(2-37)对应的齐次微分方程的解为 $x(t) = \Phi(t)x(0)$,将常数向量 $x(0)$ 用变参数向量 $\xi(t)$ 代替,可得非齐次微分方程的预解,即

$$x(t) = \Phi(t)\xi(t) \quad (2-38)$$

令 $t = 0$, 易得

$$\xi(0) = x(0)$$

(2) 确定变参数向量 $\xi(t)$

将式(2-38)代入式(2-37)并应用状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的性质,可得

$$\begin{aligned} \text{左边} = \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)\xi(t) + \Phi(t)\dot{\xi}(t) = A\Phi(t)\xi(t) + \Phi(t)\dot{\xi}(t) \\ &= \text{右边} = A\Phi(t)\xi(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

合并同类项并由 $\Phi(t)$ 的性质,得

$$\dot{\xi}(t) = \Phi^{-1}(t)Bu(t) = \Phi(-t)Bu(t)$$

对上式两边从 0 到 t 积分并将 $\xi(0) = x(0)$ 代入,得

$$\xi(t) = x(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2-39)$$

(3) 变参量回代

将式(2-39)回代到式(2-38)并应用 $\Phi(t)$ 的性质,得

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2-40)$$

从上式可以看出,系统的受控运动由两部分组成:一部分是自由运动分量 $\Phi(t)x(0)$, 由不

为零的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 引发；另一部分是受控运动分量 $\int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$ ，由输入量 $\mathbf{u}(t)$ 引发，二者相互独立。这是由线性系统的可叠加性决定的。

如果给定的初始时刻为 t_0 、初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$ ，则由状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的性质，易得

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2-41)$$

2. 间接解法 —— 拉氏变换法

对式(2-37)两边进行拉氏变换，得

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

合并同类项，得微分方程的复域解

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \\ &= \Phi(s)[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \end{aligned} \quad (2-42)$$

进行拉氏逆变换，得

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + L^{-1}[\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \quad (2-43)$$

2.1.4 系统的输出响应

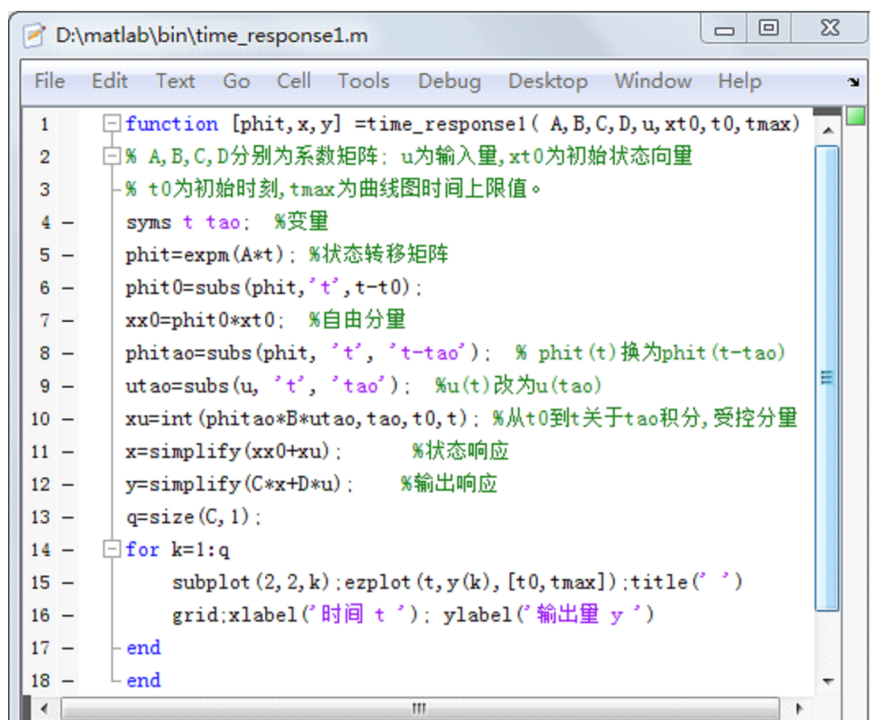
系统输出响应是系统状态运动和输入量产生的系统输出，其计算比较简单，即

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2-44)$$

2.1.5 实现线性定常连续系统运动分析的 MATLAB 编程

运用 MATLAB 实现线性定常连续系统运动分析的通用程序列于表 2.1 和表 2.2。表 2.1 程序定义了一个名为 time_response1 的函数，表 2.2 程序定义了一个名为 time_response2 的函数，两函数中的形参量相同，均为系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 和输入向量 \mathbf{u} 、初始状态向量 $\mathbf{x}t0$ 、初始时

表 2.1 实现线性定常连续系统运动分析的 MATLAB 通用程序一



刻 t_0 以及绘制曲线图的终端时间 t_{\max} 等。这两程序的功能完全相同,都是计算状态转移矩阵、状态向量和输出向量并绘制输出量的变化曲线图,只不过表 2.1 程序采用直接法,对任意初始时刻均适用,而表 2.2 程序采用拉氏变换间接法,只有当初初始时刻为 0 时才能使用。

表 2.2 实现线性定常连续系统运动分析的 MATLAB 通用程序二

```

D:\matlab\bin\time_response2.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [Phit,x,y] =time_response2( A,B,C,D,u,xt0,t0,tmax)
2 % A,B,C,D分别为系数矩阵: xt0为初始状态向量, t0为初始时刻
3 % tmax为曲线图时间上限: u为输入里, 当u=k时, 须写成u=k+0*t
4 syms s t; % 定义符号变量s,t
5 sI_A=s*eye(size(A))-A; % 求sI-A
6 Phis=inv(sI_A); % 求sI-A的逆
7 Phit=ilaplace(Phis); % 状态转移矩阵
8 xx0=Phit*xt0; %自由分量
9 us=laplace(u);
10 xu=ilaplace(Phis*B*us); %受迫分量
11 x=simplify(xx0+xu); %状态响应
12 y=simplify(C*x+D*u); %输出响应
13 q=size(C,1);
14 for k=1:q
15     subplot(2,2,k);ezplot(t,y(k),[t0,tmax]);title(' ')
16     grid;xlabel('时间 t '); ylabel('输出里 y ')
17 end
18 end
  
```

这两个程序新应用的 MATLAB 命令语句及其意义如下。

- syms—— 定义符号变量的命令语句。
- expm—— 计算矩阵指数函数的命令语句。 $\text{expm}(A * t)$ 表示计算 $A * t$ 的指数函数。
- subs—— 置换变量符号的命令语句。 $\text{subs}(\text{Phit}, 't', 't\text{-tao}')$ 表示将表达式 Phit 中的变量符号 t 用 $t\text{-tao}$ 代替。
- size—— 求矩阵维数命令语句。 $\text{size}(A,1)$ 表示求矩阵 A 的行数。
- int—— 求积分命令语句。 $\text{xu} = \text{int}(\text{PhitaoBu}, \text{tao}, t0, t)$ 表示对表达式 PhitaoBu 关于变量 tao 积分,积分下限为 $t0$ 、上限为 t ,积分值赋给 xu 。
- ezplot—— 绘制曲线图命令语句。 $\text{ezplot}(t,y,[tmin,tmax],k)$ 表示在第 k 个图形窗口绘制纵坐标为 y 、横坐标为 t 的曲线图,曲线图的时间区间为 $[tmin,tmax]$ 。
- title—— 定义曲线图标题命令语句。
- xlabel 和 ylabel—— 定义曲线图横坐标和纵坐标命令语句。
- grid—— 显示曲线图坐标线命令语句。
- laplace—— 求拉氏变换命令语句, $\text{us} = \text{laplace}(u)$ 表示对时间表达式 u 实施拉氏变换并赋值于 us 。
- ilaplace—— 求拉氏逆变换命令语句, $\text{Phit} = \text{ilaplace}(\text{Phis})$ 表示对复域表达式 Phis 实施拉氏逆变换并赋值于 Phit。
- simplify—— 化简表达式命令语句。

- eye——产生单位矩阵命令语句, eye(size(A)) 表示产生一个与方阵 **A** 同维的单位矩阵。
- subplot——绘制子图命令语句, subplot(2,2,k) 表示绘制 2×2 子图中的第 k 个图。

【例 2.3】 已知系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

若 $\mathbf{x}(0) = 0, u(t) = 10 + 100e^{-2t}\cos(3t) (t \geq 0)$, 试求系统的响应。

解 (1) 拉氏变换解法

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

因为 $\mathbf{x}(0) = 0, U(s) = \frac{10}{s} + \frac{100(s+2)}{(s+2)^2 + 9}$, 故

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= L^{-1}[\Phi(s)\mathbf{b}U(s)] = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} + \frac{20}{3}e^{-3t} - 10e^{-2t}\cos(3t) \\ 20e^{-2t}\left[\cos(3t) + \frac{3}{2}\sin(3t)\right] - 20e^{-3t} \end{bmatrix} \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \frac{10}{3} + \frac{20}{3}e^{-3t} - 10e^{-2t}\cos(3t)\end{aligned}$$

(2) MATLAB 辅助计算

在 Command Window 人机交互窗口, 输入各系数矩阵和其他参数并以实参调用表 2.2 程序函数 time_response2 后, MATLAB 立即完成计算并在该窗口输出状态转移矩阵、状态向量及输出量的表达式, 同时在图形窗口显示输出量随时间变化的曲线。具体人机交互计算过程和数据如表 2.3 所示, 输出量变化曲线如图 2.1 所示。

若调用表 2.1 程序函数 time_response1 进行计算, 结果也是一样的。

表 2.3 实现系统运动分析的 MATLAB 人机交互计算过程及数据表

```
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[0 1; -3 -4];b=[0;1];C=[1 0];D=0;
>> xt0=[0;0];t0=0;tmax=6;
>> syms t
>> u=10+100*exp(-2*t)*cos(3*t);
>> [Phit,x,y]=time_response2(A,b,C,D,u,xt0,t0,tmax)

Phit =

[ 3/(2*exp(t)) - 1/(2*exp(3*t)), 1/(2*exp(t)) - 1/(2*exp(3*t))]
[ 3/(2*exp(3*t)) - 3/(2*exp(t)), 3/(2*exp(3*t)) - 1/(2*exp(t))]

x =

20/(3*exp(3*t)) - (10*cos(3*t))/exp(2*t) + 10/3
(20*(cos(3*t) + (3*sin(3*t))/2))/exp(2*t) - 20/exp(3*t)

y =

fx 20/(3*exp(3*t)) - (10*cos(3*t))/exp(2*t) + 10/3
```

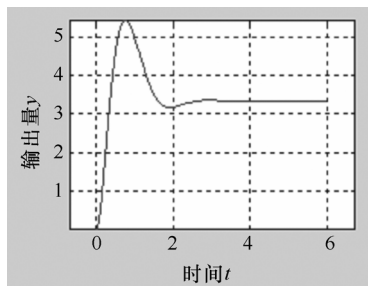


图 2.1 输出量变化曲线图

【例 2.4】 在例 2.3 中,若初始状态为 $\mathbf{x}(2) = [1 \ 2]^T$,输出矩阵为 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,试求系统的响应。

解 由于初始时刻为 $t_0 = 2$ 且 $\mathbf{x}(2) = [1 \ 2]^T$,所以本例须用时域直接法求解。

状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = e^{A(t-2)} = L^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

t 时刻系统状态向量和输出向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t-2)\mathbf{x}(2) + \int_2^t \Phi(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} + (\frac{1}{6}e^6 + 5\cos 6e^2 + 15\sin 6e^2)e^{-3t} + (5\cos 6e^{-2} - 15\sin 6e^{-2} - \frac{5}{2}e^2)e^{-t} - 10e^{-2t}\cos 3t \\ -\frac{1}{2}[(30\cos 6 + 90\sin 6)e^{-3t+2} + e^{-3t+6} + (10\cos 6 - 5e^4 - 30\sin 6)e^{-t-2} + (-40\cos 3t - 60\sin 3t)e^{-2t}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)$$

在 Command Window 人机交互窗口,调用程序表 2.1 函数 time_response1 计算,所得输出量变化曲线如图 2.2 所示。因计算公式复杂,无法在 Command Window 同一窗口显示,为节省篇幅,具体人机交互计算过程和数据不再列出。

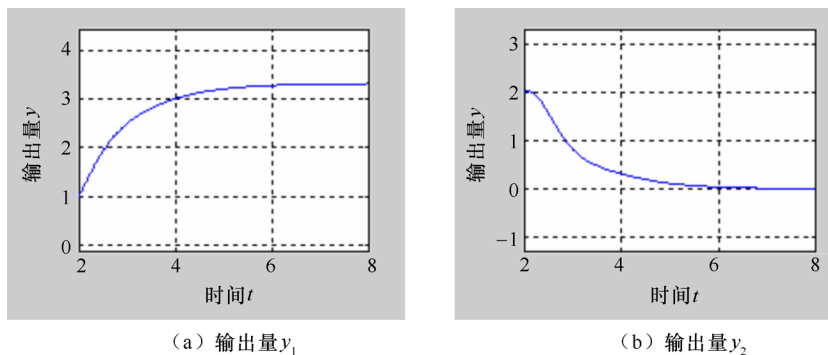


图 2.2 系统输出响应曲线图

2.2 线性时变连续系统的运动分析

线性时变系统无法实施拉氏变换,只能用时域直接法进行分析。

2.2.1 系统状态自由运动

时变系统齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2-45)$$

仿照线性定常系统自由运动分析方法,假设上式的预解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (2-46)$$

式中, $\Phi(t, t_0)$ 是状态转移矩阵。

为确定 $\Phi(t, t_0)$, 将式(2-46) 代入式(2-45), 得

$$\text{左边} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \mathbf{x}(t_0) = \text{右边} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

从而可得

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \quad (2-47)$$

这便是线性时变系统状态转移矩阵的定义式。

2.2.2 状态转移矩阵

1. 状态转移矩阵的性质

(1) 初值

在式(2-46) 中, 令 $t = t_0$, 得

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

显然

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (2-48)$$

(2) 可分解

由式(2-46) 可得

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2-49)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_1) \mathbf{x}(t_1) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2-50)$$

将上式与式(2-46) 进行比较, 可得

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad (2-51)$$

(3) 可逆

由式(2-51) 和式(2-48), 可得

$$\Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) = \Phi(t, t) = \mathbf{I} \quad (2-52)$$

从而可得

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (2-53)$$

(4) 可求导数

根据式(2-47), 状态转移矩阵关于时间 t 的导数为

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0)$$

显然

$$\left. \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \mathbf{A}(t_0)$$

另外

$$\frac{\partial \Phi(t_0, t)}{\partial t} = -\Phi(t_0, t) \mathbf{A}(t) \quad (2-54a)$$

或

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t_0} = -\Phi(t, t_0) \mathbf{A}(t_0) \quad (2-54b)$$

关于式(2-54a), 可证明如下:

对式(2-52) 关于时间求一阶导数,得

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \Phi(t_0, t) + \Phi(t, t_0) \frac{\partial \Phi(t_0, t)}{\partial t} = 0$$

将式(2-47) 代入上式并应用可分解性,得

$$\mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) + \Phi(t, t_0) \frac{\partial \Phi(t_0, t)}{\partial t} = \mathbf{A}(t) + \Phi(t, t_0) \frac{\partial \Phi(t_0, t)}{\partial t} = 0$$

由上式直接可得式(2-54a)。

2. 状态转移矩阵的计算

(1) 幂级数法

【定理】 当且仅当 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$ 时,状态转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^n + \cdots \quad (2-55)$$

证明 对 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$ 两边积分,可得

$$\int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t) d\tau$$

当 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$ 时,上式可化为

$$\mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \mathbf{A}(t) \quad (2-56)$$

对式(2-55) 求一阶导数并将式(2-56) 代入,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} &= \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \mathbf{A}(t) \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}(t) \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^3 \cdots \\ &= \mathbf{A}(t) \left[\mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^3 + \cdots \right] \\ &= \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \end{aligned}$$

可见,式(2-55) 满足状态转移矩阵的定义式(2-47),表明它就是状态转移矩阵的计算式。证毕。

必须指出,应用式(2-55) 计算状态转移矩阵的必要条件是 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$,然而对于大多数系统,该条件并不成立。

(2) 递推级数法

对式(2-47) 两边积分,可得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(\tau_1, t_0)}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \Phi(t, t_0) - \Phi(t_0, t_0) = \Phi(t, t_0) - \mathbf{I} \\ &= \text{右边} = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \end{aligned}$$

于是可得

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \quad (2-57)$$

将上式中的时间 t 用 τ_1 代替、 τ_1 用 τ_2 代替,可得

$$\Phi(\tau_1, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \quad (2-58)$$

以此类推,依次向下进行变量替换,可得

$$\Phi(\tau_2, t_0) = I + \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) \Phi(\tau_3, t_0) d\tau_3 \quad (2-59)$$

$$\Phi(\tau_3, t_0) = I + \int_{t_0}^{\tau_3} A(\tau_4) \Phi(\tau_4, t_0) d\tau_4 \quad (2-60)$$

.....

依次回代上去,可得

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = I &+ \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \\ &\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1) A(\tau_2) A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \cdots \end{aligned} \quad (2-61)$$

可以证明,当 $A(t)$ 在积分区间上有界时,上式级数是均匀收敛的,但一般难以写成闭合形式。

2.2.3 系统状态受控运动

时变系统的非齐次状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2-62)$$

因齐次方程 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ 的解为 $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$,故按照常数变易法思想,假设非齐次方程的预解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t) \quad (2-63)$$

令 $t = t_0$, 易得

$$\xi(t_0) = x(t_0) \quad (2-64)$$

为求变参数向量 $\xi(t)$,将预解式(2-63)代入式(2-62)并应用状态转移矩阵的性质,得

$$\begin{aligned} \text{左边} = \dot{x}(t) &= A(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \\ &= \text{右边} = A(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + B(t)u(t) \end{aligned}$$

从而可得

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(t_0, t)B(t)u(t)$$

对上式两边积分、移项并将式(2-64)代入,可得

$$\xi(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (2-65)$$

再将上式回代到预解式(2-63)并应用状态转移矩阵的性质,可得

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (2-66)$$

与定常系统一样,时变系统的状态受控运动也是自由运动分量 $\Phi(t, t_0)x(t_0)$ 和受控运动分量 $\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau$ 两部分的叠加。

2.2.4 系统输出响应

求出状态向量 $x(t)$ 后,将其代入输出方程,即可确定输出响应,即

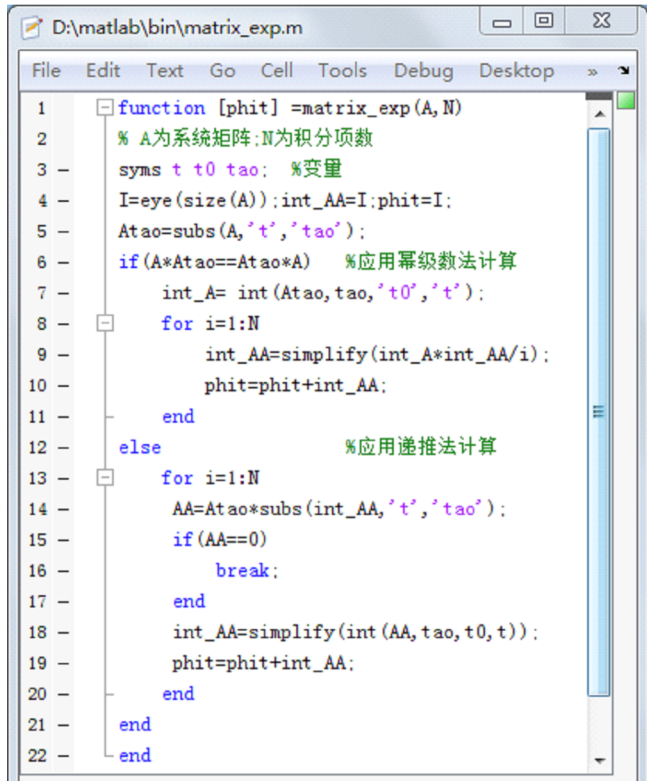
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2-67)$$

2.2.5 实现线性时变连续系统运动分析的 MATLAB 编程

1. 计算状态转移矩阵的 MATLAB 编程

运用 MATLAB 计算状态转移矩阵的一个通用程序列于表 2.4。该程序定义了一个名为 matrix_exp 的函数，其形参有系统矩阵 A 和状态转移矩阵的积分项数 N ，输出参量为状态转移矩阵。该程序自动根据 A 的特性选择计算方法，当 $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$ 时，按式(2-55) 计算，当 $A(t)A(\tau) \neq A(\tau)A(t)$ 时，按式(2-61) 计算。

表 2.4 计算线性时变系统状态转移矩阵的 MATLAB 通用程序



```
D:\matlab\bin\matrix_exp.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop »
1 function [phit] =matrix_exp(A,N)
2 % A为系统矩阵:N为积分项数
3 syms t t0 tao; %变量
4 I=eye(size(A));int_AA=I;phit=I;
5 Atao=subs(A,'t','tao');
6 if (A*Atao==Atao*A) %应用幂级数法计算
7     int_A= int (Atao,tao,'t0','t');
8     for i=1:N
9         int_AA=simplify(int_A*int_AA/i);
10        phit=phit+int_AA;
11    end
12 else %应用递推法计算
13     for i=1:N
14         AA=Atao*subs(int_AA,'t','tao');
15         if (AA==0)
16             break;
17         end
18         int_AA=simplify(int (AA,tao,t0,t));
19         phit=phit+int_AA;
20     end
21 end
22 end
```

2. 实现系统运动分析的 MATLAB 编程

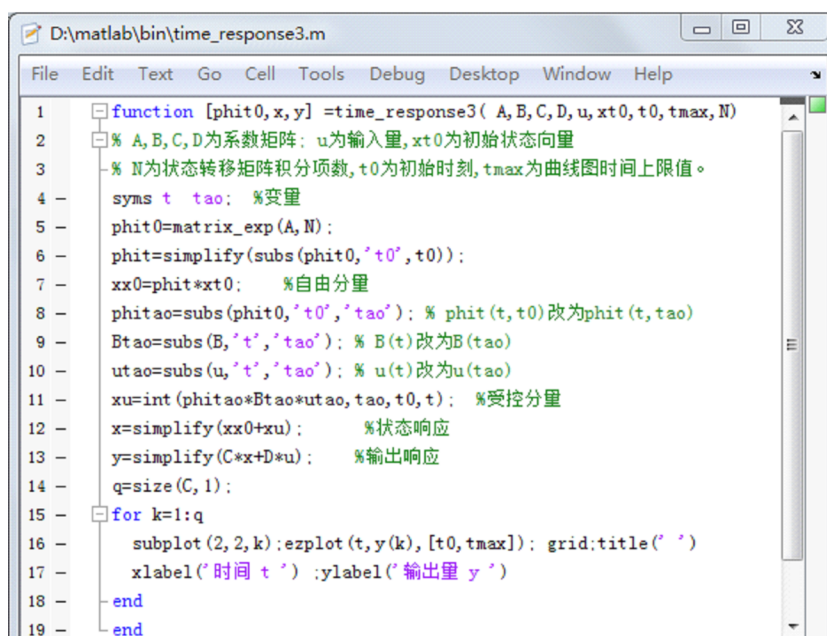
运用 MATLAB 实现线性时变连续系统运动分析的一个通用程序列于表 2.5。该程序定义了一个名为 time_response3 的函数，函数的形参有系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 和输入向量 u 、初始状态向量 x_{t0} 、初始时刻 t_0 以及绘制曲线图的终端时间 t_{max} 和状态转移矩阵的积分项数 N 等。该程序的功能是计算状态转移矩阵 $phit$ 、状态向量 x 和输出向量 y 并绘制输出量随时间变化的曲线图，而状态转移矩阵是通过调用程序表 2.4 中的 matrix_exp 函数计算的。

【例 2.5】 假设系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u$$
$$y = x_2$$

若初始状态为 $x(0) = 0$ ，试求在控制信号 $u = 3(t \geq 0)$ 作用下系统的响应。

表 2.5 实现线性时变连续系统运动分析的 MATLAB 通用程序



解 (1) 常规计算

$$\text{系统矩阵} \quad A = \begin{bmatrix} te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

显然, $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$, 因此状态转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} \approx I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^2 = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

其中

$$\phi_{11}(t, t_0) = \frac{1}{32} [(2t+1)e^{-2t} - (2t_0+1)e^{-2t_0}]^2 - \frac{1}{4} (2t+1)e^{-2t} + \frac{1}{4} (2t_0+1)e^{-2t_0} + 1$$

$$\phi_{22}(t, t_0) = \frac{1}{8} (e^{-2t} - e^{-2t_0})^2 - \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-2t_0} + 1$$

因 $x(0) = 0$, 所以自由运动分量为 0, 系统运动等于受控运动分量, 即

$$\begin{aligned} x &= x_u = \int_0^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \approx 3 \int_0^t \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, \tau) & 0 \\ 0 & \phi_{22}(t, \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= 3 \left[\int_0^t \left\{ \frac{1}{32} [(2t+1)e^{-2t} - (2\tau+1)e^{-2\tau}]^2 - \frac{1}{4} (2t+1)e^{-2t} + \frac{1}{4} (2\tau+1)e^{-2\tau} + 1 \right\} d\tau \right. \\ &\quad \left. \int_0^t \left[\frac{1}{8} (e^{-2t} - e^{-2\tau})^2 - \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-2\tau} + 1 \right] e^{-\tau} d\tau \right] \\ &= \left[\frac{3}{256} [(32t^3 + 56t^2 + 44t + 11)e^{-4t} - (80 + 128t^2 + 160t)e^{-2t} + 256t + 69] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{3}{8} e^{-4t} + e^{-3t} - \frac{7}{4} e^{-2t} - 3e^{-t} + \frac{143}{40} \right] \end{aligned}$$

输出量为

$$y = Cx \approx -\frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{3}{8} e^{-4t} + e^{-3t} - \frac{7}{4} e^{-2t} - 3e^{-t} + \frac{143}{40}$$

(2) MATLAB 辅助计算

应用通用程序函数 time_response3 实现上述计算的 MATLAB 人机交互过程及数据如表 2.6 所示,输出量的变化曲线如图 2.3 所示。

表 2.6 实现系统运动分析的 MATLAB 人机交互计算过程及数据表

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> syms t
>> A=[t*exp(-2*t) 0;0 exp(-2*t)];b=[1:exp(-t)];C=[0 1];t0=0;xt0=[0;0];
>> u=3;tmax=10;N=2:[phit0,x,y]=time_response3(A,b,C,0,u,xt0,t0,tmax,N)

phit0 =

[ ((2*t + 1)/exp(2*t) - (2*t0 + 1)/exp(2*t0))^2/32 - (2*t + 1)/(4*exp(2*t)) + (2*t0 + 1)/(4*exp(2*t0)) + 1,
  0, 1/(2*exp(2*t0)) - 1/(2*exp(2*t))]

x =

(3*(44*t - 80*exp(2*t) + 69*exp(4*t) - 160*t*exp(2*t) + 256*t*exp(4*t) - 128*t^2*exp(2*t) + 56*t^2 + 32*t^3 + 11))/(256*exp(4*t))
1/exp(3*t) - 7/(4*exp(2*t)) - 3/exp(t) + 3/(8*exp(4*t)) - 1/(5*exp(5*t)) + 143/40

y =

1/exp(3*t) - 7/(4*exp(2*t)) - 3/exp(t) + 3/(8*exp(4*t)) - 1/(5*exp(5*t)) + 143/40

```

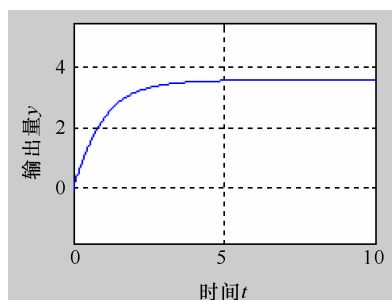


图 2.3 系统输出响应曲线图

【例 2.6】 假设系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{-2t} & 1 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u$$

$$y = 5x_2$$

若初始状态为 $x(2) = [1 \quad 2]^T$, 试求在控制信号 $u = 3(t \geq 0)$ 作用下系统的响应。

解 因系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} te^{-2t} & 1 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$, $A(t)A(\tau) \neq A(\tau)A(t)$, 故

$$\Phi(t, t_0) \approx I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

其中

$$\phi_{11}(t, t_0) = \frac{1}{4} [-(2t+1)e^{-2t} + (2t_0+1)e^{-2t_0}] + \frac{1}{32} e^{-4(t+t_0)} (e^{2t} - e^{2t_0} + 2t_0 e^{2t} - 2te^{2t_0})^2 + 1$$

$$\phi_{12}(t, t_0) = t - t_0 - \frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{2} te^{-2t_0} + \frac{1}{4} t_0 e^{-2t} - \frac{1}{4} t_0 e^{-2t_0} - \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} + \frac{1}{2} t t_0 e^{-2t}$$

$$\phi_{22}(t, t_0) = \frac{1}{2}(-e^{-2t} + e^{-2t_0}) + \frac{1}{8}e^{-4(t+t_0)}(e^{2t} - e^{2t_0})^2 + 1$$

$$x(t) = \Phi(t, 2)x(2) + \int_2^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\approx \begin{bmatrix} -4.224 + 2.4255t + 3e^{-t} + (1.05 + 0.9t - 1.2t^2)e^{-2t} - \left(t + \frac{2}{3}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{32}\right)e^{-4t} \\ 2.425 - 3e^{-t} - 1.2e^{-2t} + e^{-3t} + 0.3e^{-4t} - \frac{1}{5}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$y = 5x_2 \approx 12.125 - 15e^{-t} - 6e^{-2t} + 5e^{-3t} + 1.5e^{-4t} - e^{-5t}$$

输出量的变化曲线如图 2.4 所示。

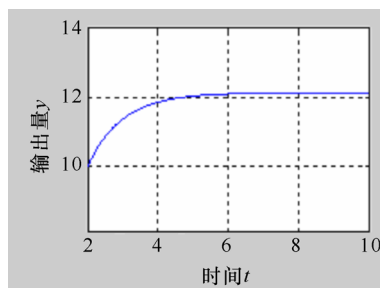


图 2.4 系统输出响应曲线图

2.3 线性定常离散系统的运动分析

2.3.1 线性定常连续系统的离散化及其 MATLAB 实现

1. 离散化模型

当代控制系统一般为数字控制系统,在这种系统中,控制器一般为数字控制器(如可编程控制器 PLC、STD 总线工业控制机、工业 PC、单片机、专用控制计算机等),其内部及输入/输出信号为数字信号,而被控制对象和其他元件为非数字装置,这些装置的信号为连续信号。由于数字控制器只能处理数字信号,非数字装置只能用连续信号驱动,因此,在这两种信号之间需要转换装置。把连续信号转换为数字信号的元件是模数(或 A/D)转换器,把数字信号转换为连续信号的元件是数模(或 D/A)转换器。在系统分析时,需要把两种不同类型的信号化为统一形式,或者把连续部分的数学模型离散化,或者把离散部分的数学模型连续化。由于离散化模型更适合计算机运算,所以通常把连续部分的数学模型离散化。

将连续系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

转化为离散方程有两种常用方法。一种是用离散变量的差分近似代替连续变量的微分,用差分与采样周期之商作为导数,进而实现近似的离散化模型。另一种是对连续变量状态方程的解的一般式进行离散化,从中求出离散化状态方程。下面具体论证这种离散化方法。

线性定常连续系统状态方程的解的一般式为

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2-68)$$

离散信号只在各采样瞬时有确定的值,在采样间隔区间无意义。考虑到状态转移的可分解性,可令

$$\begin{aligned} t_0 &= kT \\ t &= (k+1)T \end{aligned}$$

其中, T 为采样周期, k 为采样节点序数或采样步数。

由于采样周期 T 很小,所以输入量可认为只在两采样点上发生变化,在两采样间隔区间不发生变化,即具有零阶保持器特性,其数学描述为

$$u(\tau) = u(kT) \quad \tau \in [kT, (k+1)T]$$

于是,式(2-68)可化为

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]B d\tau u(kT) \quad (2-69)$$

对上式右边的积分作变量代换 $t = (k+1)T - \tau$, 得

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]B d\tau = - \int_T^0 \Phi(t)B dt = \int_0^T \Phi(t)B dt$$

令

$$A^* = \Phi(T) = e^{AT} \quad (2-70)$$

$$B^* = \int_0^T \Phi(t)B dt = \int_0^T e^{A't} B dt \quad (2-71)$$

可得

$$x[(k+1)T] = A^* x(kT) + B^* u(kT) \quad (2-72a)$$

省略采样周期符号 T , 可得

$$x(k+1) = A^* x(k) + B^* u(k) \quad (2-72b)$$

这便是连续系统的离散化状态方程。其中 A^* 和 B^* 为常数矩阵,分别与 A 和 B 同维。

至于连续系统输出方程 $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ 的离散方程,因不涉及微分运算,故可直接经变量代换而得到,即

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2-73)$$

2. 线性定常连续系统离散模型的 MATLAB 实现

MATLAB 提供了连续模型和离散模型的相互转化命令。

将连续模型转化为离散模型的命令语句是 `c2d`,调用格式如下:

$$[Ak, Bk] = c2d(A, B, T)$$

其中, T 为采样周期。

执行 `c2d` 命令后, MATLAB 输出的是离散模型的系统矩阵 Ak 和输入矩阵 Bk 。

将离散模型转化为连续模型的命令语句是 `d2c`,调用格式如下:

$$[A, B] = d2c(Ak, Bk, T)$$

执行 `d2c` 命令后, MATLAB 输出的是连续模型的系统矩阵 A 和输入矩阵 B 。

【例 2.7】 假设连续系统的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

若采样周期为 $T = 0.05s$,试求其离散化模型。

解 (1) 常规计算

由式(2-35) 可得系统状态转移矩阵,即

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & te^{-5t} & \frac{1}{2}t^2e^{-5t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

离散化模型的系数矩阵为

$$\mathbf{A}^* = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-3T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5T} & Te^{-5T} & \frac{1}{2}T^2e^{-5T} \\ 0 & 0 & e^{-5T} & Te^{-5T} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-5T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8607 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7788 & 0.0389 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0.7788 & 0.0389 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7788 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^* = \int_0^T e^{At} \mathbf{b} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3T}) \\ \frac{1}{125} - \frac{1}{250}e^{-5T}(25T^2 + 10T + 2) \\ \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-5T}(5T + 1) \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0464 \\ 0 \\ 0.0011 \\ 0.0442 \end{bmatrix}$$

系统的离散化模型为

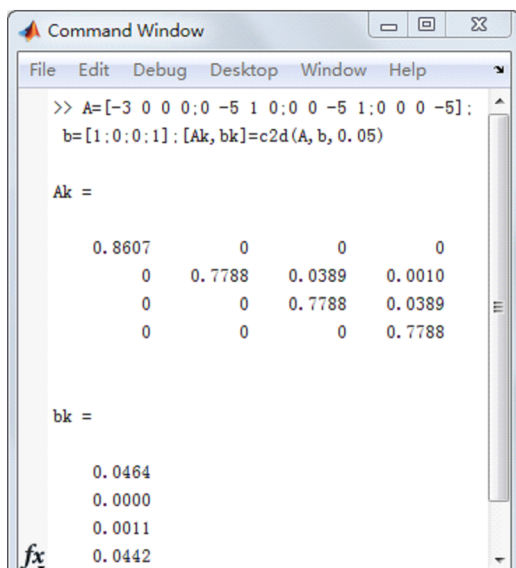
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}^* \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}^* u(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k)$$

(2) MATLAB 辅助计算

实现上述离散化模型的 MATLAB 人机交互计算过程和数据如表 2.7 所示。

表 2.7 实现离散化模型的 MATLAB 过程和数据表



```

>> A=[-3 0 0 0;0 -5 1 0;0 0 -5 1;0 0 0 -5];
b=[1;0;0;1];[Ak,bk]=c2d(A,b,0.05)

Ak =

    0.8607         0         0         0
         0    0.7788    0.0389    0.0010
         0         0    0.7788    0.0389
         0         0         0    0.7788

bk =

    0.0464
    0.0000
    0.0011
    0.0442
  
```

2.3.2 线性定常离散系统的运动分析

线性定常离散系统的运动分析方法有时域直接递推法和 z 变换间接法两种。

1. 求解状态方程的递推法

递推法也叫迭代法,顾名思义,就是用第 0 步的采样值推定第 1 步的采样值,再用第 1 步的采样值推定第 2 步的采样值,以此类推,一步一步向未来递推。

假设离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (2-74)$$

若给定初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 和控制信号序列 $\mathbf{u}(j) (j = 0, 1, 2, \dots)$, 则状态方程解的序列值为

$$(\text{第 1 步}) \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$

$$(\text{第 2 步}) \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$

$$(\text{第 3 步}) \mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)$$

.....

更一般地,第 k 步采样状态向量为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-75a)$$

或

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{u}(k-j-1) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-75b)$$

从以上分析可以看出,与连续系统状态方程的解相类似,离散系统状态方程的解也等于自由运动分量和受控运动分量的叠加。第 k 步采样的自由运动分量为 $\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$, 与输入量无关,受控运动分量为 $\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$ 或 $\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{u}(k-j-1)$, 与初始状态无关。同时,第 k 步的自由分量 $\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$ 也是由 $\mathbf{x}(0)$ 经 k 步转移而到达的,这种转移是由 $\mathbf{x}(0)$ 经乘 \mathbf{A}^k 而实现的。若记

$$\Phi(k) = \mathbf{A}^k \quad (2-76)$$

那么 $\Phi(k)$ 就是离散系统的状态转移矩阵,而式(2-75)可写成

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)\mathbf{B}\mathbf{u}(j) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-77a)$$

或

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)\mathbf{B}\mathbf{u}(k-j-1) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-77b)$$

从式(2-77)可以看出,与连续系统不同,离散系统第 k 步的采样状态值与第 k 步的采样输入值没有关系,而只与第 k 步以前的输入采样序列值有关。

如果给定的初始状态向量为 $\mathbf{x}(k_0)$, 控制信号序列为 $\mathbf{u}(j) (j = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots)$, 则状态方程解的序列值为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k - k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k - j - 1)\mathbf{B}\mathbf{u}(j) \quad (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots) \quad (2-77c)$$

直接递推法技术路线明了,但求得的解一般难以写成闭合形式。

2. 求解状态方程的 z 变换法

对式(2-74)两边进行 z 变换,得

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}u(z)$$

合并同类项并求出 $\mathbf{X}(z)$, 得

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(z)$$

进行 z 逆变换, 可得

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z]\mathbf{x}(0) + Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(z)] \quad (2-78)$$

将上式与式(2-77a) 进行比较, 直接得

$$\Phi(k) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \quad (2-79)$$

用 z 变换法求得的解可写成闭合形式, 但运算较复杂。

3. 系统的输出响应

将状态向量序列和输入向量序列代入输出方程, 可得系统输出响应序列, 即

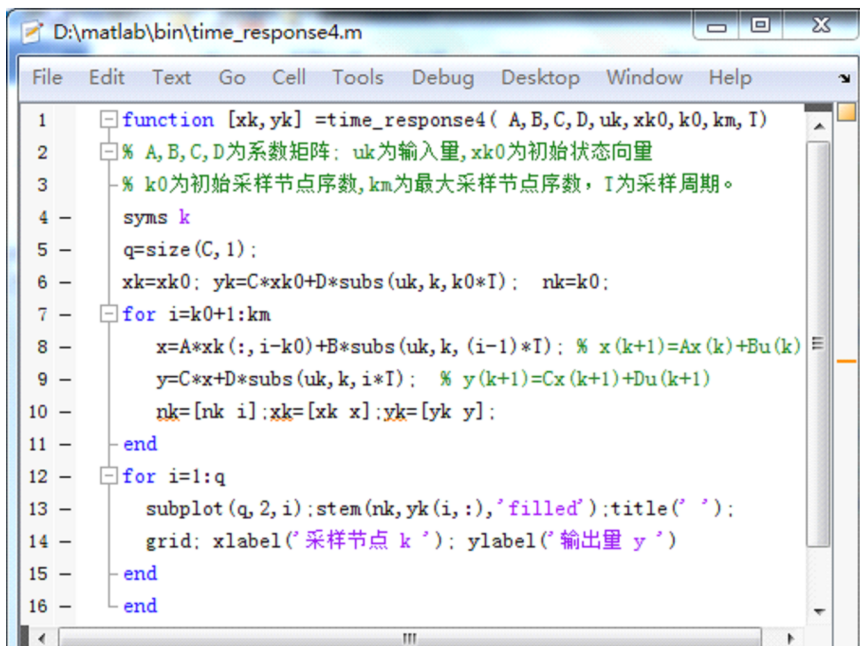
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-80)$$

必须强调指出, 在以上计算公式中, 均依惯例省略了采样周期 T , 在实际计算中, 输入量中的采样节点序数 k 须用采样节点时间 kT 代替。当输入量为常数时, 同一采样时间上的响应序列值相同而不论采样周期 T 多大。但当输入量为 k 的函数时, 同一采样时间上的响应序列值因采样周期 T 的不同而不同。

2.3.3 实现线性定常离散系统运动分析的 MATLAB 编程

运用 MATLAB 实现线性定常离散系统运动分析的通用程序列于表 2.8 和表 2.9。表 2.8 程序定义的函数名为 time_response4, 表 2.9 程序定义的函数名为 time_response5。这两个函数的形参均为系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 、输入量 u_k 、初始状态向量 $\mathbf{x}k0$ 、初始采样节点序数 $k0$ 和最大采样节点序数 km 等。表 2.8 程序采用直接递推法计算, 适用于任何初始时刻的运动分析, 其功能是计算状态向量和输出向量序列值并绘制输出量序列变化图; 而表 2.9 程序采用 z 变换法计算, 只适用于初始时刻为 0 的运动分析, 但其功能比表 2.8 程序多, 除了给出状态向量和输出向量序列值并绘制输出量序列变化图外, 还给出状态转移矩阵、状态向量和输出向量的计算通式。

表 2.8 实现线性定常离散系统运动分析的 MATLAB 通用程序一



```

D:\matlab\bin\time_response4.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [xk,yk] =time_response4( A,B,C,D,uk,xk0,k0,km,I)
2 % A,B,C,D为系数矩阵; uk为输入量, xk0为初始状态向量
3 % k0为初始采样节点序数, km为最大采样节点序数, I为采样周期。
4 syms k
5 q=size(C,1);
6 xk=xk0; yk=C*xk0+D*subs(uk,k,k0*I); nk=k0;
7 for i=k0+1:km
8     x=A*xk(:,i-k0)+B*subs(uk,k,(i-1)*I); % x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)
9     y=C*x+D*subs(uk,k,i*I); % y(k+1)=Cx(k+1)+Du(k+1)
10    nk=[nk i]; xk=[xk x]; yk=[yk y];
11 end
12 for i=1:q
13     subplot(q,2,i); stem(nk,yk(i,:), 'filled'); title(' ');
14     grid; xlabel('采样节点 k '); ylabel('输出量 y ')
15 end
16 end
  
```


表 2.9 实现线性定常离散系统运动分析的 MATLAB 通用程序二

```

1 function [Phik,x,y,xk,yk] =time_response5( A,B,C,D,uk,xk0,k0,km,I)
2 % A,B,C,D系数矩阵;xk0初始状态,uk输入量,若uk=3,须写成uk=3+0*k
3 % k0,km分别为初始采样和最大采样节点序数,I为采样周期。
4 syms k z n % 定义符号变量
5 xk=[];yk=[];q=size(C,1);uk=subs(uk,k,k*I);
6 zi_A=z*eye(size(A))-A; % 求z*(zI-A)
7 Phik=simplify(iztrans(z*inv(zi_A))); % z逆变换求状态转移矩阵
8 xx0=Phik*xk0; %自由分里
9 uz=ztrans(uk); % 对u(k)进行z变换
10 xu=iztrans(inv(zi_A)*B*uz); %z反变换求受迫分里
11 x=simplify(xx0+xu); %状态响应
12 uk=iztrans(uz);
13 y=simplify(C*x+D*uk); %输出响应
14 for i=0:km
15     xi=double(subs(x,n,i));xk=[xk xi];
16     yi=double(subs(y,n,i));yk=[yk yi];
17 end
18 for i=1:q
19     k=0:km;
20     subplot(2,2,i);stem(k,yk(i,:), 'filled');title(' ');
21     grid; xlabel(' 采样节点 k '); ylabel(' 输出里 y ')
22 end
23 end
    
```

在这两个程序中新应用的 MATLAB 命令语句有：

- stem——离散函数绘图命令语句,stem(k,y,'filled')表示绘制以 k 为横坐标、以 y 为纵坐标的离散序列图,坐标点 (k,y) 用实心圆标定;
- ztrans——求 z 变换命令语句,ztrans(uk)表示对 uk 实施 z 变换;
- iztrans——求 z 逆变换命令语句,iztrans(uz)表示对 uz 实施 z 逆变换。

【例 2.8】假设离散系统的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

若初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad -1]^T$,输入量 $u = 1 + ke^{-3k}$,采样周期 $T = 0.1s$,试求系统第 10 步采样以前的响应序列。

解 鉴于离散系统迭代运算技术路线十分简单,兹省略计算过程。在 Command Window 窗口调用表 2.9 通用程序函数 time_response5 进行计算,所得人机交互过程和数据如表 2.10

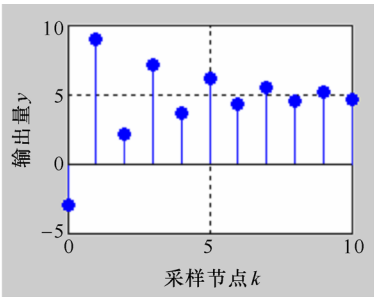
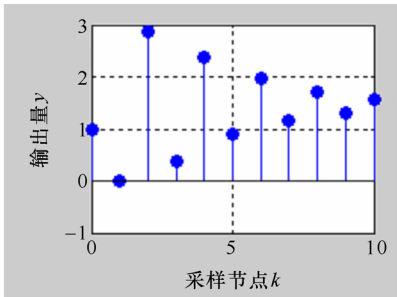
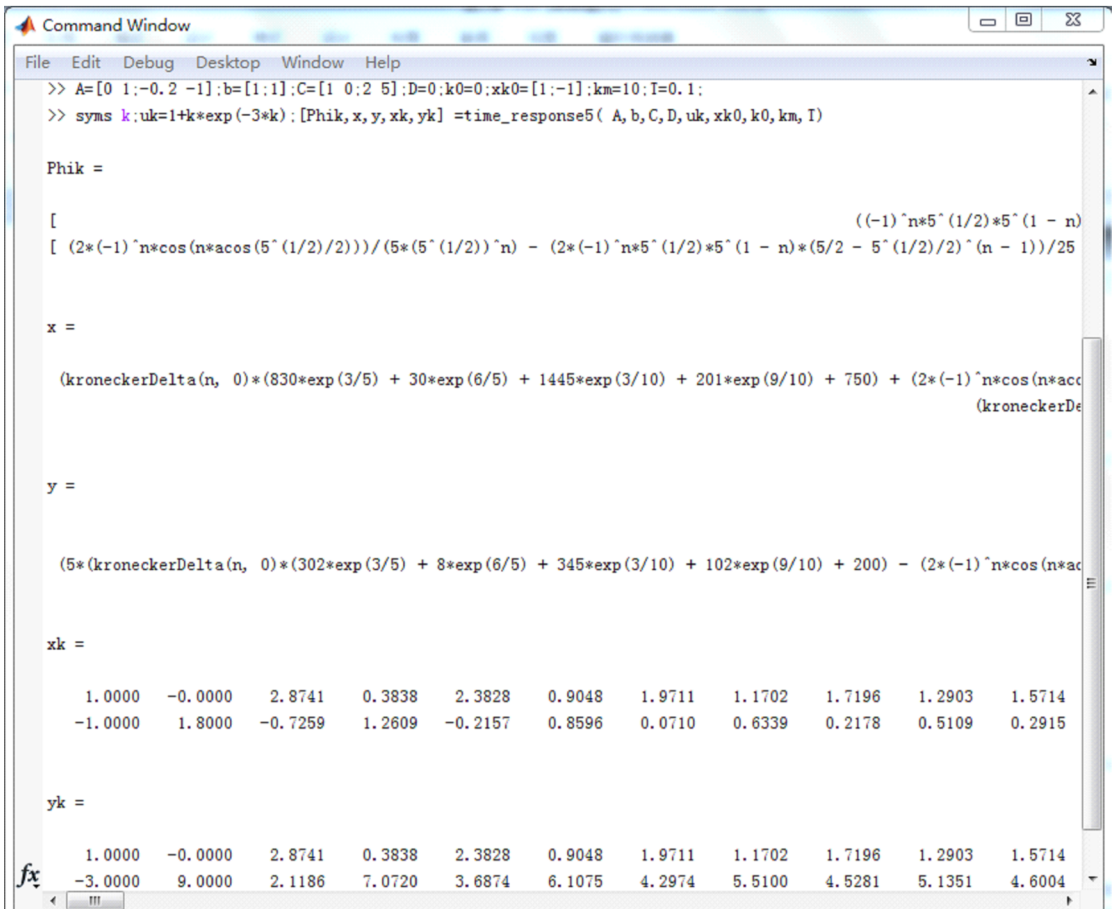
所示,表中的 xk 和 yk 分别为状态向量和输出向量的序列值,即 $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{y}(k) =$

$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} (k = 0, 1, 2, \dots, 10)$ 。表中的 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 和 Phik 分别为状态向量、输出向量和状态转移矩阵的

计算通式,但因这些表达式过于复杂,无法在同一屏幕显示,故其截屏内容不完整。计算通式中

的 n 就是采样节点序数, kroneckerDelta 函数是在采样节点上其值为 1 的单位脉冲函数。输出响应序列图如图 2.5 所示。

表 2.10 实现离散系统运动分析的 MATLAB 人机交互过程及计算数据表



(a) 输出量 y_1 序列图

(b) 输出量 y_2 序列图

图 2.5 系统输出响应序列图

若调用表 2.8 通用程序函数 time_response4 进行计算, 结果也一样, 只不过无状态向量和输出向量及状态转移矩阵的计算通式。

2.4 线性时变离散系统的运动分析

2.4.1 线性时变连续系统的离散化及其 MATLAB 实现

1. 离散化模型

线性时变连续系统的离散化方法与线性定常连续系统的离散化方法完全类似。

线性时变连续系统状态方程的解的一般式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2-81)$$

在上式中,令

$$\begin{aligned} t_0 &= kT \\ t &= (k+1)T \\ \mathbf{u}(\tau) &= \mathbf{u}(kT) \quad \tau \in [kT, (k+1)T] \end{aligned}$$

可得

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau\mathbf{u}(kT) \quad (2-82)$$

在上式中,令

$$\mathbf{B}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (2-83)$$

$$\mathbf{A}(kT) = \Phi[(k+1)T, kT] \quad (2-84)$$

可得

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{u}(kT) \quad (2-85a)$$

省略采样周期符号 T , 可得

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2-85b)$$

这便是线性时变系统的离散化状态方程;

至于时变系统的输出方程,可由连续方程

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

经变量代换而直接得到,即

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2-86)$$

2. 实现线性时变连续系统离散模型的 MATLAB 编程

运用 MATLAB 实现线性时变离散化模型的通用程序列于表 2.11。该程序定义的函数为 discrete_model, 函数的形参为系统矩阵 $\mathbf{A}t$ 、控制矩阵 $\mathbf{B}t$ 、采样周期 T 和状态转移矩阵的积分项数 N 。状态转移矩阵是通过调用表 2.4 程序函数 matrix_exp 计算的。

【例 2.9】 假设线性时变连续系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2 - e^{-2t} & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 10 - te^{-5t} & 0 \\ 0 & 3 - e^{-5t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

试求其离散化模型, 采样周期 $T = 0.1s$ 。

表 2.11 实现线性时变连续系统离散化模型的 MATLAB 通用程序

```

1 function [phit,Ak,Bk] = discrete_model( At,Bt,N,I)
2 %At,Bt为系数矩阵,I和I1为采样周期,N为状态转移矩阵积分项数
3 syms k I1 t t0 tao
4 [phit] =matrix_exp(At,N); %计算状态转移矩阵
5 AkI=expand(subs(phit,{t,t0},{(k+1)*I1,k*I1})); %计算A(kI)
6 AkI=subs(AkI,I1,I);
7 Ak=subs(AkI,k,k/I); %省略采样周期符号I后的A(k)
8 phitao=subs(phit,{t,t0},{(k+1)*I1,tao});
9 Btao=subs(Bt,t,tao);
10 BkI=expand(int(phitao*Btao,tao,k*I1,(k+1)*I1)); %计算B(kI)
11 BkI=subs(BkI,I1,I);
12 Bk=subs(BkI,k,k/I); %省略采样周期符号I后的B(k)
13 end

```

解

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -2 - e^{-2t} & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因系统矩阵 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) \neq \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$, 故

$$\Phi(t, t_0) \approx \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

其中

$$\phi_{11}(t, t_0) = -2(t + t_0) + \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-2t_0}) + \frac{1}{8}e^{-4(t+t_0)}[e^{2t} - e^{2t_0} + 4(t - t_0)e^{2(t+t_0)}]^2 + 1$$

$$\phi_{12}(t, t_0) = t - t_0 + \frac{1}{4}(e^{-2t} - e^{-2t_0}) + \frac{1}{2}e^{-2t}(t - t_0) + 4tt_0 - 2t^2 - 2t_0^2$$

$$\phi_{22}(t, t_0) = -2(t - t_0) + 2(t - t_0)^2 + 1$$

将状态转移矩阵中的 t 用 $(k+1)T$ 代替、 t_0 用 kT 代替, 可得离散化系统矩阵, 即

$$\mathbf{A}(kT) = \begin{bmatrix} A_{11}(kT) & A_{12}(kT) \\ 0 & \frac{41}{50} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}(kT) = \frac{1}{8}(1 - 2e^{-0.2} + e^{-0.4})e^{-4kT} + \frac{2}{5}(e^{-0.2} - 1)e^{-2kT} + \frac{41}{50}$$

$$A_{12}(kT) = \left(\frac{3}{10}e^{-0.2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2kT} + \frac{2}{25}$$

省略采样周期符号 T 得

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} A_{11}(k) & A_{12}(k) \\ 0 & \frac{41}{50} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}(k) = \frac{1}{8}(1 - 2e^{-0.2} + e^{-0.4})e^{-4k} + \frac{2}{5}(e^{-0.2} - 1)e^{-2k} + \frac{41}{50}$$

$$A_{12}(k) = \left(\frac{3}{10}e^{-0.2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2k} + \frac{2}{25}$$

离散化控制矩阵为

$$\mathbf{b}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau] \mathbf{b} d\tau = \begin{bmatrix} \left(\frac{61}{400}e^{-0.2} - \frac{1}{8}\right)e^{-2kT} + \frac{13}{3000} \\ \frac{34}{375} \end{bmatrix}$$

省略采样周期符号 T 得

$$\mathbf{b}(k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{61}{400}e^{-0.2} - \frac{1}{8}\right)e^{-2k} + \frac{13}{3000} \\ \frac{34}{375} \end{bmatrix}$$

系统的离散化状态空间模型为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 10 - ke^{-5k} & 0 \\ 0 & 3 - e^{-5k} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

2.4.2 线性时变离散系统的状态运动分析

线性时变离散系统的运动分析只能采用时域直接递推法求解。其步骤与定常离散系统的迭代法的步骤别无二致，兹不加推导，直接给出计算通式。

假设离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2-87)$$

给定初始状态 $\mathbf{x}(k_0)$ 和输入向量序列 $\mathbf{u}(k) (k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots)$ ，上式的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) = & \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\cdots\mathbf{A}(k_0+1)\mathbf{A}(k_0)\mathbf{x}(k_0) + \\ & \sum_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\cdots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j) \quad (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots) \end{aligned} \quad (2-88a)$$

或

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j) \quad (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots) \quad (2-88b)$$

式中， $\Phi(k, k_0)$ 为时变离散系统的状态转移矩阵，其数学表达式为

$$\Phi(k, k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(j) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\cdots\mathbf{A}(k_0+1)\mathbf{A}(k_0) \quad (2-89)$$

上式是齐次矩阵方程

$$\Phi(k+1, k_0) = \mathbf{A}(k)\Phi(k, k_0) \quad (2-90)$$

在初始条件 $\Phi(k_0, k_0) = \mathbf{I}$ 下的解。这只需将式(2-89)代入式(2-90)，即可得证。

必须强调指出，在以上计算公式中，均依惯例省略了采样周期 T ，在实际计算中，采样节点序数 k 须用采样节点时间 kT 代替。

2.4.3 实现线性时变离散系统运动分析的 MATLAB 编程

运用 MATLAB 实现线性时变离散系统运动分析的一个通用程序列于表 2.12。该程序定义的函数名为 time_response6, 其形参为系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 、输入量 uk 、初始状态向量 $xk0$ 、初始采样节点序数 $k0$ 和最大采样节点序数 km 等, 其功能是计算状态向量和输出向量序列值并绘制输出量序列图。该程序也可用于计算线性定常离散系统运动。

表 2.12 实现线性时变离散系统运动分析的 MATLAB 通用程序

```

1 function [xk,yk]=time_response6( A,B,C,D,uk,xk0,k0,km,I)
2 % A,B,C,D为系数矩阵: uk为输入量, xk0为初始状态向量
3 % k0,km分别为初始和最大采样节点序数, I为采样周期。
4 syms k
5 q=size(C,1);nk=k0;xk=xk0;
6 yk=subs(C,k,k0*I)*xk0+subs(D,k,k0*I)*subs(uk,k,k0*I);
7 for i=k0+1:km
8 Ak=subs(A,k,(i-1)*I);
9 Bk=subs(B,k,(i-1)*I);
10 x=Ak*xk(:,i-k0)+Bk*subs(uk,k,(i-1)*I);%x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k)
11 Ck=subs(C,k,i*I);
12 Dk=subs(D,k,i*I);
13 y=Ck*x+Dk*subs(uk,k,i*I); % y(k+1)=C(k+1)x(k+1)+D(k+1)u(k+1)
14 nk=[nk i];xk=[xk x];yk=[yk y];
15 end
16 for i=1:q
17 subplot(q,2,i);stem(nk,yk(i,:), 'filled');title(' ');
18 grid; xlabel('采样节点 k '); ylabel('输出量 y ')
19 end
20 end
  
```

【例 2.10】 假设线性时变离散系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} -1 & e^{-2k} \\ -3e^{-k} & -0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(k) = \begin{bmatrix} 1 + e^{-6k} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 5 + e^{-2k} \\ 5e^{-2k} & 1 \end{bmatrix}$$

若 $\mathbf{x}(10) = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$, $u(k) = 5 + e^{-6k}$, 试求当采样周期分别为 $T = 0.1\text{s}$ 和 $T = 0.05\text{s}$ 时前 20 步采样的响应序列。

解 (1) $T = 0.1\text{s}$

将已知条件作为实参在 Command Window 窗口调用表 2.12 通用程序函数 time_response6 进行计算, 所得人机交互过程和数据如表 2.13 所示, 表中的 xk 和 yk 即为 $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$ ($k = 10, 11, 12, \dots, 20$)。输出响应序列图如图 2.6 所示。

表 2.13 MATLAB 人机交互过程及计算数据表

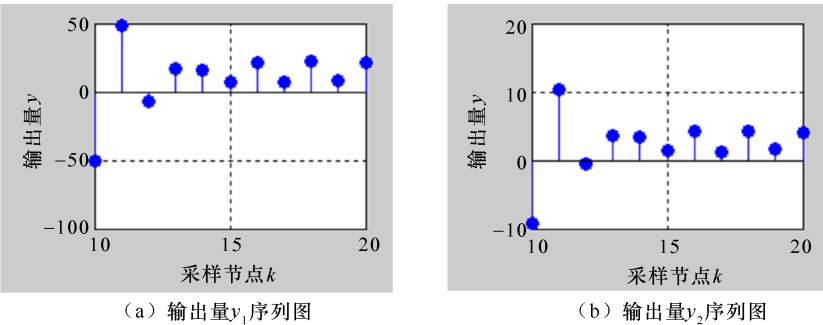
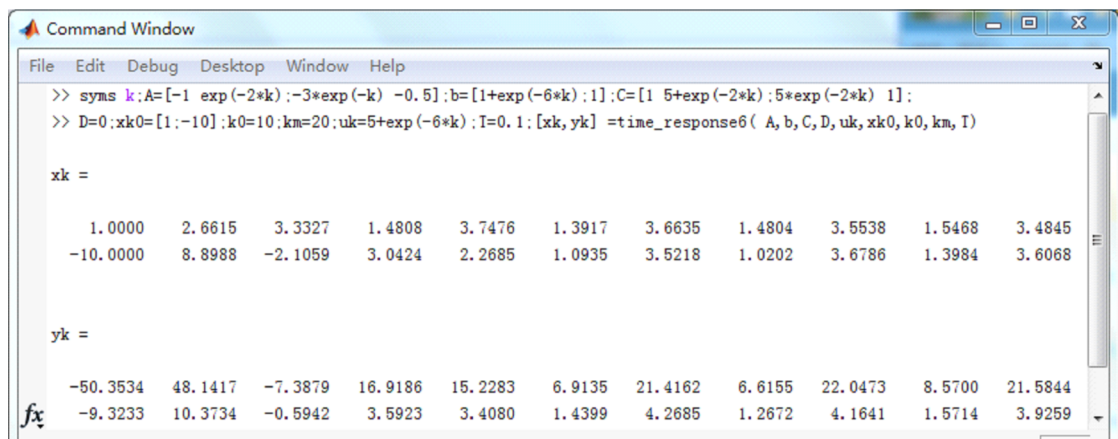
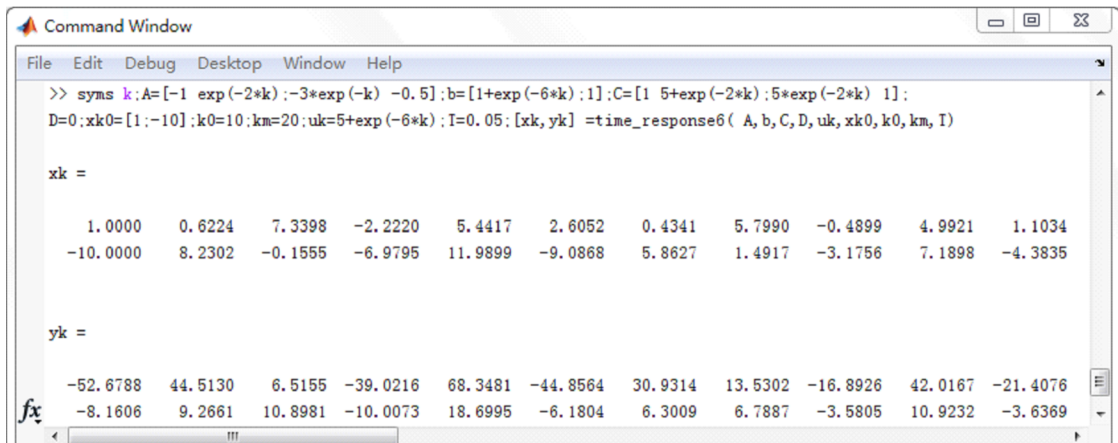


图 2.6 当 $T = 0.1\text{s}$ 时系统输出响应序列图

(2) $T = 0.05\text{s}$

$T = 0.05\text{s}$ 的运动分析人机交互过程和数据如表 2.14 所示, 输出响应序列图如图 2.7 所示。

表 2.14 MATLAB 人机交互过程及计算数据表



比较图 2.6 和图 2.7, 可以看出, 采样周期对时变系统动态特性影响很大, 这是不难理解的。因为不仅输入量随采样时间变化, 系统结构参数及其系数矩阵也随采样时间变化。在不同采样节点上, 不仅输入量不同, 系统结构也迥然不同。可以这样说, 第 $(k+1)T$ 采样时刻的系统

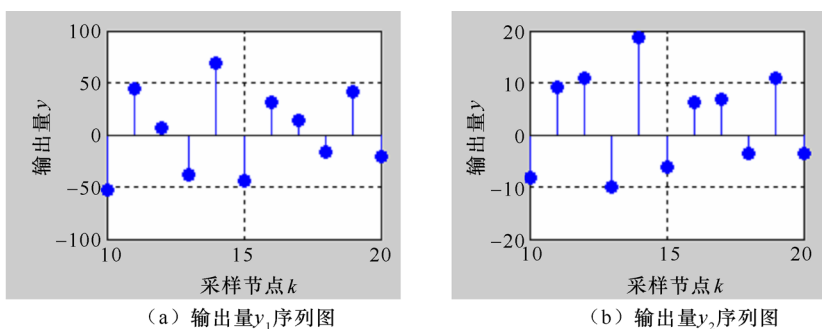


图 2.7 当 $T = 0.05\text{s}$ 时系统输出响应序列图

与第 kT 采样时刻的系统是两个不同的系统。采样周期 T 直接决定着两相邻采样节点的时间间隔,从而直接决定着系统结构和输入量的变化快慢。

习 题 2

2-1 下列矩阵哪个是 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数?

$$\begin{aligned} (1) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} & (2) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} - te^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & te^{-t} + e^{-t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \\ (3) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} & (4) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} - te^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2-2 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件?如果满足,求对应的矩阵 \mathbf{A} 。

$$\begin{aligned} (1) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix} & (2) \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \\ (3) \quad \Phi(t, t_0) &= \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2-3 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

若 $u(t) = 10(1 + te^{-3t})$, 初始状态分别为 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 5]^T$ 和 $\mathbf{x}(5) = [2 \ 2]^T$, 试求系统的响应。

2-4 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [1 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

若 $\mathbf{x}(0) = 0, u(t) = 1 + e^{-2t}[\sin(3t) + \cos(3t)]$, 试求系统的响应。

2-5 假设系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

若 $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $u = 2$, 试求系统的响应。

2-6 系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 + e^{-2t} & 0 \\ 1 & -2 + e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

若 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $u(t) = 1$, 试求系统的响应。

2-7 系统的动态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

若 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}^T$, $u(k) = 10[1 + e^{-2k} \cos(3k)]$, 采样周期 $T = 1\text{s}$, 试求系统第 5 步采样以前的响应序列。

2-8 系统的动态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & e^{-2k} \\ 0 & 1 - e^{-k} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 - e^{-2k} \\ 1 + 10e^{-5k} \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 2 - e^{-k} & 0 \\ 0 & 1 + e^{-2k} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

若 $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}^T$, $u(k) = 1 + 10e^{-0.2k}$, 采样周期 $T = 1\text{s}$, 试求系统第 7 步采样以前的响应序列。

2-9 试求下列连续动态方程的离散化方程。

$$(1) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{采样周期 } T = 0.2\text{s})$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 + e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{采样周期 } T = 1\text{s})$$

第3章 控制系统的稳定性分析

内容提示:本章讨论控制系统的李雅普诺夫稳定性分析法,包括线性定常连续和离散、线性时变连续和离散、非线性连续等系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算。

任何一个处于平衡状态的控制系统,当受到扰动作用后,必然会偏离平衡状态进行运动,这种运动称为受扰运动。扰动消失以后,受扰运动不能立即消失,这时的受扰运动称为受扰自由运动。

有些系统,其受扰自由运动随着时间的延续以衰减方式变化,最终衰减为 0。这样的系统是稳定系统。而有些系统,其受扰自由运动不仅不随时间的推移而衰减,相反以发散方式变化,其幅值愈来愈大,直至系统毁坏。这样的系统是不稳定系统。

以上是经典控制理论关于稳定性的定义。根据该定义可推导出线性定常连续系统稳定的充分必要条件,即全部极点为负数或实部为负数。以此为基础,可以推导出一些稳定性实用判据,如劳斯(Routh)和赫尔维茨(Hurwitz)代数判据、奈奎斯特(Nyquist)几何判据等。这些判据对线性定常系统有效而实用,但不能用以分析线性时变系统和非线性系统。

1892 年,俄国数学家李雅普诺夫(Ляпунов)提出了判定稳定性的两种方法:一种根据微分方程解的性质来判定系统的稳定性,一般称为李雅普诺夫第一法或间接法;另一种不需求解微分方程,通过构造一个以系统微分方程为根据的标量函数,再根据该标量函数的定号性来判定系统的稳定性,一般称为李雅普诺夫第二法或直接法。第一法仍未绕过求解微分方程的困难,难以广泛应用,而第二法不需求解微分方程,只须构造一个相关的标量函数,适应性自然要广泛得多。本章论证第二法。

系统稳定与否,取决于受扰自由运动的变化形式。而自由运动是系统外部激励消失以后由不为零的初始状态引发的,其变化规律只取决于系统本身的结构及参数。因此,系统的稳定性也只取决于系统本身的结构及参数,是系统本身的固有特性,与控制作用无关。在研究稳定性时,只考虑自由运动数学模型(即齐次微分方程),不考虑输入量。

3.1 李雅普诺夫稳定性基本定理

3.1.1 数学基础

1. 平衡状态

系统运动形式保持恒定的状态称为平衡状态,其数学描述是状态变量关于时间的导数等于 0。

假设非线性系统的齐次微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (3-1)$$

平衡状态应满足

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}(\mathbf{x}_c, t) = 0 \quad (3-2)$$

式中, \mathbf{x}_c 为平衡状态。

许多非线性系统有多个平衡状态。

假设线性系统的齐次微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (3-3)$$

平衡状态应满足

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_c = 0 \quad (3-4)$$

当 $\mathbf{A}(t)$ 非奇异时, $\mathbf{x}_c = 0$ 是唯一的平衡状态, 当 $\mathbf{A}(t)$ 奇异时, 平衡状态有无穷多个。

2. 标量函数和矩阵的定号性

应用李雅普诺夫稳定性定理时, 必须判定标量函数的定号性。

假设 Ω 是包含状态空间原点的有限闭域, 在 Ω 内 $V(\mathbf{x})$ 是向量 \mathbf{x} 的标量函数且具有连续一阶偏导数:

(1) 正定和半正定函数

若当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x}) > 0$, 则称 $V(\mathbf{x})$ 为正定函数。

若当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 $V(\mathbf{x})$ 为半正定函数。

(2) 负定和半负定函数

若当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x}) < 0$, 则称 $V(\mathbf{x})$ 为负定函数。

若当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x}) \leq 0$, 则称 $V(\mathbf{x})$ 为半负定函数。

(3) 不定函数

不论闭域 Ω 多么小, 若当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x})$ 可正可负, 则称 $V(\mathbf{x})$ 为不定函数。

(4) 二次型函数的定号性

二次型函数定义为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (3-5)$$

式中, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ 是实对称矩阵, 即 $p_{ij} = p_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 。

根据西尔维斯特(Sylvester)准则, 式(3-5)定义的二次型函数的定号性等价于实对称矩阵 \mathbf{P} 的定号性。

(5) 正定矩阵和半正定矩阵

矩阵 \mathbf{P} 为正定的充分必要条件是其特征值为正或各阶主子式为正, 即

$$\lambda_i > 0 \quad \{\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{P}) = 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

或

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= p_{11} > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ &\dots\dots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

如果 \mathbf{P} 为奇异矩阵,那么当其所有特征值为非负或各阶主子式为非负时, \mathbf{P} 为半正定。

(6) 负定矩阵和半负定矩阵

矩阵 \mathbf{P} 为负定的充分必要条件是它所有特征值为负或奇数次主子式为负、偶数次主子式为正,即

$$\lambda_i < 0 \quad \{\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{P}) = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

或

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= p_{11} < 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

类似地,可定义奇异矩阵 \mathbf{P} 的半负定条件:所有特征值为非正或奇数次主子式为非正、偶数次主子式为非负。

3.1.2 李雅普诺夫稳定性定义

(1) isL 稳定

在平衡状态 \mathbf{x}_c 的邻域内,任意选定正实数 ϵ ,如果存在另一正实数 $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$,当初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 满足

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_c\| \leq \delta \quad (3-6)$$

时,由 $\mathbf{x}(t_0)$ 引发的系统自由运动 $\mathbf{x}(t)$ 总满足

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| < \epsilon \quad (3-7)$$

则称系统在 \mathbf{x}_c 处是李雅普诺夫意义上稳定的,简称 isL 稳定。如果 $\delta = \delta(\epsilon)$ 与初始时刻 t_0 无关,则称 isL 一致稳定。

对于 n 阶系统,在状态空间 \mathbf{R}^n , $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\|$ 是欧几里得范数,即

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| = \sqrt{(x_1 - x_{c1})^2 + (x_2 - x_{c2})^2 + \dots + (x_n - x_{cn})^2} \quad (3-8)$$

由此可知,式(3-6)和式(3-7)分别划定了一个超球域,两超球域的球心在平衡状态 \mathbf{x}_c ,半径分别为 δ 和 ϵ ,超球域的边界分别为超球面 $S(\delta)$ 和 $S(\epsilon)$ 。式(3-6)将 $\mathbf{x}(t_0)$ 限定在超球面 $S(\delta)$ 内,式(3-7)将 $\mathbf{x}(t)$ 限定在超球面 $S(\epsilon)$ 内。因此,isL 稳定的几何意义是,由位于超球面 $S(\delta)$ 内的任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 引发的自由运动 $\mathbf{x}(t)$ 永远不会超出超球面 $S(\epsilon)$ 。对于二阶系统, $S(\delta)$ 和 $S(\epsilon)$ 退化为圆,isL 稳定的几何意义如图 3.1(a) 所示。

(2) 渐近稳定

如果系统在 \mathbf{x}_c 处是 isL 稳定的,且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| \rightarrow 0 \quad (3-9a)$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_c \quad (3-9b)$$

则称系统在 \mathbf{x}_c 处是渐近稳定的。又当系统在 \mathbf{x}_c 处是 isL 一致稳定时,称为一致渐近稳定。

式(3-9)表明,当时间足够大时,由偏离平衡状态 \mathbf{x}_c 的任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 引发的自由运动 $\mathbf{x}(t)$ 最终趋于 \mathbf{x}_c 。对于二阶系统,渐近稳定的几何意义如图 3.1(b) 所示。

(3) 全局渐近稳定

如果 $\mathbf{x}(t_0)$ 是 \mathbf{R}^n 中的任意点,由 $\mathbf{x}(t_0)$ 引发的自由运动 $\mathbf{x}(t)$ 总是趋近于 \mathbf{x}_c ,则称系统是全

局渐近稳定的。对于二阶系统,全局渐近稳定的几何意义如图 3.1(c) 所示。

当系统是全局渐近稳定时,平衡状态 \mathbf{x}_c 一定是唯一的。

非奇异线性系统只有一个平衡状态 $\mathbf{x}_c = 0$, 只要渐近稳定,那必定也是全局渐近稳定。许多非线性系统有多个平衡状态,渐近稳定只具有局部意义。

(4) 不稳定

如果在平衡状态 \mathbf{x}_c 的邻域内,对于任意选定的正实数 ϵ ,不论 ϵ 多么小,均无法找到另一正实数 $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$,使之满足 isL 稳定的条件,则称系统在该平衡状态是不稳定的。其几何意义是,只要 $\mathbf{x}(t_0)$ 偏离 \mathbf{x}_c ,由它引发的 $\mathbf{x}(t)$ 必定随时间的延续离 \mathbf{x}_c 而远去。对于二阶系统,不稳定的几何意义如图 3.1(d) 所示。

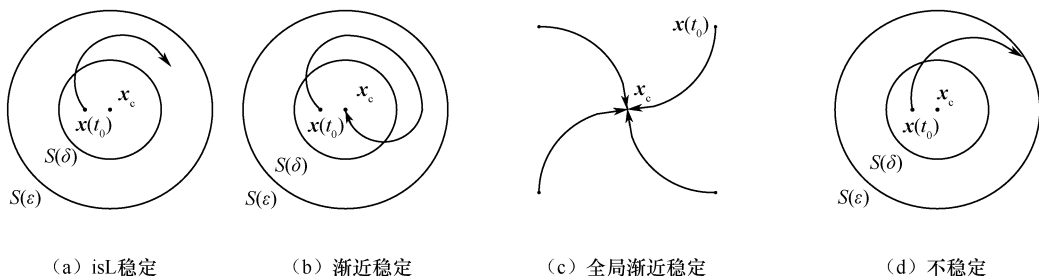


图 3.1 关于稳定性的几何意义

3.1.3 李雅普诺夫稳定性定理

【定理 1】 在 $\mathbf{x}_c = 0$ 的邻域内,对于满足系统齐次状态方程的状态向量 \mathbf{x} ,如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$,而且

- (1) $V(\mathbf{x}, t)$ 正定
- (2) $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t)$ 负定

那么系统在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处渐近稳定。又当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时,如果 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$,那么系统全局渐近稳定。

【定理 2】 在 $\mathbf{x}_c = 0$ 的邻域内,对于满足系统齐次状态方程的状态向量 \mathbf{x} ,如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$,而且

- (1) $V(\mathbf{x}, t)$ 正定
- (2) $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t)$ 半负定
- (3) 除 $\mathbf{x}_c = 0$ 外, $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t)$ 不恒等于 0。

那么系统在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处是渐近稳定的。又当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时,如果 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$,那么系统是全局渐近稳定的。

【定理 3】 在 $\mathbf{x}_c = 0$ 的邻域内,对于满足系统齐次状态方程的状态向量 \mathbf{x} ,如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$,而且

- (1) $V(\mathbf{x}, t)$ 正定
- (2) $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t)$ 半负定

那么系统在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处是 isL 稳定的。

必须指出:

(1) 以上定理关于稳定的条件对非奇异线性系统是充分必要条件,但对非线性系统只是充分条件,而不是充分必要条件。换言之,如果选取的标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 满足稳定条件,那么可断定系统稳定,这样的标量函数称为李雅普诺夫 V 函数(简称李氏 V 函数)。但如果选取的标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 不满足稳定条件,那么对非奇异线性系统即可断定不稳定,而对非线性系统不能就此断定不稳定。

(2) 以上定理均以 $\mathbf{x}_e = 0$ 为平衡状态,对于任意平衡状态 $\mathbf{x}_e \neq 0$,可通过线性坐标变换将系统齐次状态方程转化为 0 平衡状态,再进行分析。

(3) 以上定理均以标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 为依据,该函数除了其中的 \mathbf{x} 必须满足系统齐次状态方程外并未有其他限制。因此,能够判定系统稳定性的 $V(\mathbf{x}, t)$ 不是唯一的。李雅普诺夫稳定性定理之所以有广泛的适应性,原因正在于此。但另一方面,也正是 $V(\mathbf{x}, t)$ 的随意性,使其选取没有章法可循,只能凭判断和经验通过试探选取。实际上,在许多情况下,要选取一个李氏 V 函数并非易事。通常依据系统的广义能量和广义距离预选 V 函数。

以广义能量作为 $V(\mathbf{x}, t)$ 的合理性在于:实际的系统都存在引力场,在物理上,引力场的平衡状态具有能量极小值。显然能量是非负的,其次 $V(\mathbf{x}, t)$ 的一阶导数负定,意味着随时间 t 的增大,能量在不断减小,当达到极小值时,系统重回平衡状态。

以 \mathbf{x} 偏离 \mathbf{x}_e 的广义距离作为 $V(\mathbf{x}, t)$ 的合理性在于:首先广义距离是正定的,其次 $V(\mathbf{x}, t)$ 的一阶导数负定,意味着随时间 t 的增大, \mathbf{x} 至 \mathbf{x}_e 的广义距离在不断减小,直至 \mathbf{x} 到达 \mathbf{x}_e 。

(4) 以上定理具有普遍意义,既适用于线性系统,也适用于非线性系统,既适用于定常系统,也适用于时变系统。

【例 3.1】 假设系统的齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(ax_1 + bx_2x_1^2) \end{bmatrix} \quad (a > 0, b > 0)$$

试分析系统的稳定性。

解 令

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -(ax_1 + bx_2x_1^2) \end{bmatrix} = 0$$

解此方程,可得 $\mathbf{x}_e = 0$ 且唯一。

预选 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_e 之间的广义距离作为 V 函数,即

$$V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + x_2^2$$

显然, $V(\mathbf{x})$ 是正定的。

对 $V(\mathbf{x})$ 关于时间 t 求一阶导数并将给定的系统齐次微分方程代入,可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2ax_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2ax_1x_2 - 2x_2(ax_1 + bx_2x_1^2) = -2bx_1^2x_2^2$$

显然, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定。

因 $V(\mathbf{x})$ 正定, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定,且当 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$,所以该系统是全局渐进稳定的。

3.2 线性连续系统的稳定性分析

3.2.1 线性定常连续系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算

线性定常系统的齐次微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3-10)$$

当 \mathbf{A} 非奇异时, $\mathbf{x}_c = 0$ 是唯一平衡状态。

选取二次型函数为 V 函数, 即

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3-11)$$

式中, \mathbf{P} 为正定实对称矩阵。

因 \mathbf{P} 是正定实对称矩阵, 故 $V(\mathbf{x})$ 是正定的, 如果 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定, 那么系统是渐近稳定的。为此, 对上式关于时间求一阶导数并将齐次微分方程代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}] \mathbf{x} \end{aligned}$$

根据李雅普诺夫定理, 欲使系统稳定, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 必须负定, 而根据西尔维斯特准则, 这只需 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ 负定。于是可得如下定理:

【定理】 线性定常连续系统全局渐近稳定的充分必要条件是: 任给正定实对称矩阵 \mathbf{Q} , 存在正定实对称矩阵 \mathbf{P} , 使得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (3-12)$$

此时, 李氏 V 函数及其一阶导数分别为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned}$$

式(3-12) 称为线性定常系统的李雅普诺夫方程, 简称李氏方程。

在实际应用时, 矩阵 \mathbf{Q} 常取单位阵。

为简化运算, \mathbf{Q} 也可取半正定实对称矩阵, 但此时 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 为半负定。根据前面李氏稳定性定理 2, 欲使系统渐近稳定, 还必须附加 $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 不恒为 0 的条件。

最简单的半正定矩阵为

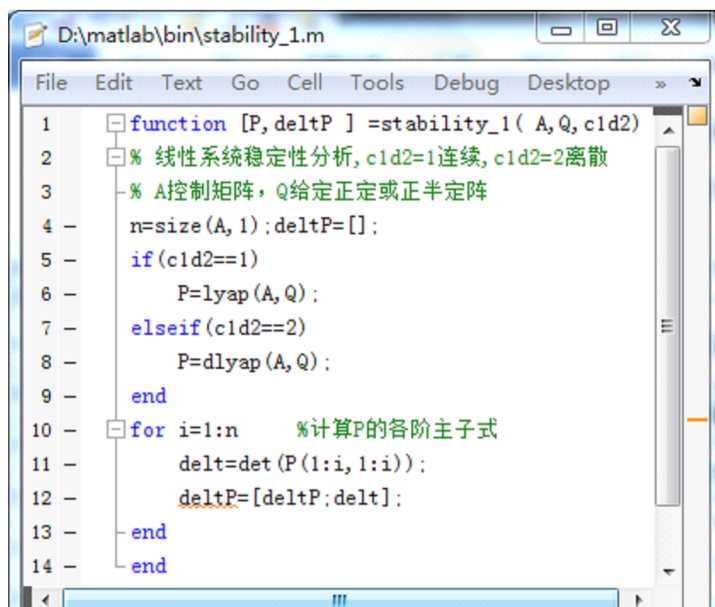
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

用于线性定常系统稳定性分析的一个 MATLAB 通用程序列于表 3.1。该程序定义了一个名为 stability_1 的函数, 函数的形参为系统矩阵 \mathbf{A} 、李氏方程中的矩阵 \mathbf{Q} 、连续和离散系统选择开关量 cld2。cld2 = 1 适用于连续系统, cld2 = 2 适用于离散系统。函数返回的值为李氏方程中的 \mathbf{P} 矩阵及其各阶主子式向量 deltP。该程序新应用的 MATLAB 命令有:

- lyap—— 求解线性定常连续系统李氏方程命令语句;
- dlyap—— 求解线性定常离散系统李氏方程命令语句;

- det——计算矩阵的行列式命令语句。

表 3.1 实现线性定常系统稳定性分析的 MATLAB 通用程序



在 Command Window 命令窗口,输入矩阵 A 和 Q 及开关量 $cld2$ 并调用该程序, MATLAB 迅即完成计算并输出 P 矩阵及其各阶主子式向量 $deltP$ 。

【例 3.2】 假设系统的自由运动方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

试判定系统的稳定性,并求李氏 V 函数。

解 (1) 常规分析

因系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ 非奇异,故该系统只有一个位于状态空间原点的平衡状态,即

$$\mathbf{x}_c = 0$$

李氏方程为

$$A^T P + P A = -Q$$

其中, $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ 。

若取 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 那么 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = x_2^2$ 。如果 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0$, 必有 $x_2 = 0$ 。根据给定状态方程 $\dot{x}_2 = -4x_1 - 7x_2$, 当 $x_2 = 0$ 时, 必有 $x_1 = 0$ 。可见, 只有在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处, $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0$ 。除此以外, $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ 不恒为 0。于是由李氏稳定性方程可得

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解方程可得

$$p_{12} = p_{21} = 0, p_{11} = \frac{2}{21}, p_{22} = \frac{1}{14}$$

因 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$ 为正定实对称矩阵, 矩阵 \mathbf{Q} 为半正定实对称矩阵且 $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 不恒为 0, 满足

稳定的充分必要条件, 故该系统全局渐近稳定, 其李氏 V 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{2}{21} x_1^2 + \frac{1}{14} x_2^2$$

(2) MATLAB 辅助分析

运用 MATLAB 实现本例系统稳定性分析的人机交互计算过程和数据如表 3.2 所示。从该表可以看出, 应用表 3.1 的 MATLAB 程序计算得到的 \mathbf{P} 矩阵及其二阶主子式分别为

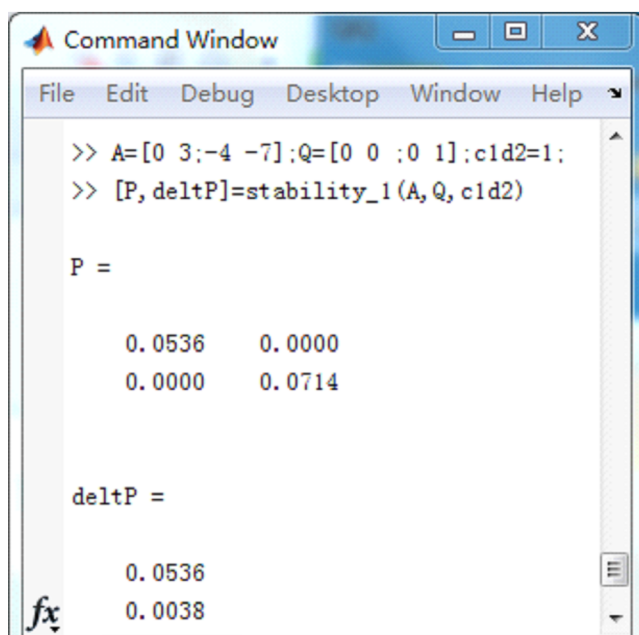
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.0536 & 0 \\ 0 & 0.0714 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 0.0536 > 0$$

$$\Delta_2 = 0.0038 > 0$$

因 \mathbf{P} 是正定实对称矩阵, 故系统是全局渐近稳定的。这与上面的结论是一致的。

表 3.2 MATLAB 人机交互过程及数据表



```

Command Window

File Edit Debug Desktop Window Help

>> A=[0 3;-4 -7];Q=[0 0;0 1];c1d2=1;
>> [P,deltP]=stability_1(A,Q,c1d2)

P =

    0.0536    0.0000
    0.0000    0.0714

deltP =

    0.0536
    0.0038
  
```

必须指出, 由于算法的原因, MATLAB 命令函数 lyap 计算出的 \mathbf{P} 矩阵不完全符合李氏方程, 但 \mathbf{P} 矩阵的定号性是正确的。

3.2.2 线性时变连续系统的稳定性分析

线性时变系统的齐次微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (3-13)$$

当 $\mathbf{A}(t)$ 非奇异时, $\mathbf{x}_e = 0$ 是唯一平衡状态。

仿照线性定常系统 V 函数的选取方法,取

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (3-14)$$

式中, $\mathbf{P}(t)$ 为正定实对称矩阵。

对上式关于时间 t 求一阶导数并将齐次状态方程代入,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t)] \mathbf{x} \end{aligned}$$

根据李雅普诺夫定理,欲使系统稳定, $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 必须负定。而根据西尔维斯特准则,这只需 $\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t)$ 负定。于是可得如下定理:

【定理】 线性时变连续系统全局渐近稳定的充分必要条件是:任给正定实对称矩阵 $\mathbf{Q}(t)$,存在正定实对称矩阵 $\mathbf{P}(t)$,使得

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (3-15)$$

此时,李氏 V 函数及其一阶导数分别为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} \end{aligned}$$

式(3-15)为线性时变系统的李雅普诺夫方程。

在实际应用时,矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 常取单位阵。为简化运算, $\mathbf{Q}(t)$ 也可取半正定实对称矩阵,但必须附加 $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}$ 不恒为 0 的条件。

时变系统的稳定性不仅与 $\mathbf{A}(t)$ (从而与 $\Phi(t, t_0)$) 有关,还与初始时刻 t_0 有关。

式(3-15)李氏方程是黎卡提(Riccati)矩阵微分方程的特殊情形,其解为

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T(t_0, t) \mathbf{P}(t_0) \Phi(t_0, t) - \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) \mathbf{Q}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (3-16)$$

式中, $\Phi(t, t_0)$ 是式(3-13)的状态转移矩阵; $\mathbf{P}(t_0)$ 为初始条件。

式(3-16)的正确性只需将其代入式(3-15)即可得到验证。

3.3 线性离散系统的稳定性分析

3.3.1 线性定常离散系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算

线性定常离散系统的齐次状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) \quad (3-17)$$

当 \mathbf{A} 非奇异时, $\mathbf{x}_c = 0$ 是唯一平衡状态。

仿照线性定常连续系统 V 函数的选取方法,取

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \quad (3-18)$$

式中, \mathbf{P} 为正定实对称矩阵。

离散系统信号不连续, $V(\mathbf{x}(k))$ 的导数不存在,只能用差分代替导数。因此,对上式求一阶前向差分并将状态方程(3-17)代入,可得

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\ &= \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{x}^T(k) \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
&= \mathbf{x}^T(k) [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}] \mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

根据李雅普诺夫定理,欲使系统稳定, $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ 必须负定。这只需 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}$ 负定。于是可得如下定理:

【定理】 线性定常离散系统全局渐近稳定的充分必要条件是:任给正定实对称矩阵 \mathbf{Q} , 存在正定实对称矩阵 \mathbf{P} , 使得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (3-19)$$

此时, 李氏 V 函数及其一阶差分分别为

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}(k)) &= \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
\Delta V(\mathbf{x}(k)) &= -\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

式(3-19) 为线性定常离散系统的李雅普诺夫方程。

在实际应用时, 矩阵 \mathbf{Q} 常取单位阵。为简化运算, \mathbf{Q} 也可取半正定实对称矩阵, 但必须附加 $\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k)$ 不恒为 0 的条件。

实现线性定常离散系统稳定性分析的 MATLAB 程序仍用表 3.1 通用程序, 只是开关量须取 $\text{cld2} = 2$ 。

【例 3.3】 假设离散系统的自由运动方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试判定系统的稳定性, 并求李氏 V 函数。

解 (1) 常规分析

显然, 平衡状态只有 $\mathbf{x}_e = 0$ 。

李氏方程为

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

其中, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ 。

若取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, 那么李氏方程为

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解方程可得

$$p_{12} = p_{21} = -\frac{7}{33}, p_{11} = -\frac{19}{33}, p_{22} = -\frac{13}{132}$$

因 $\mathbf{P} = -\begin{bmatrix} \frac{19}{33} & \frac{7}{33} \\ \frac{7}{33} & \frac{13}{132} \end{bmatrix}$ 为负定实对称矩阵, 不满足稳定的充分必要条件, 所以, 该系统不

稳定。

本例与例 3.2 相比, 二者具有相同的系统矩阵, 但本例系统是离散的, 而例 3.2 系统是连续的, 本例系统是不稳定的, 而例 3.2 系统是稳定的。这表明具有相同系统矩阵的连续系统与离散系统的稳定性是完全不同的。经典控制理论证明, 线性定常离散系统稳定的充分必要条件是其脉冲传递函数的极点位于复平面 $[z]$ 上以原点为圆心的单位圆内, 而不是复平面 $[z]$ 的左半部。

(2) MATLAB 辅助分析

运用 MATLAB 实现本例系统稳定性分析的人机交互计算过程和数据如表 3.3 所示。从该表可以看出, \mathbf{P} 矩阵及其二阶主子式分别为

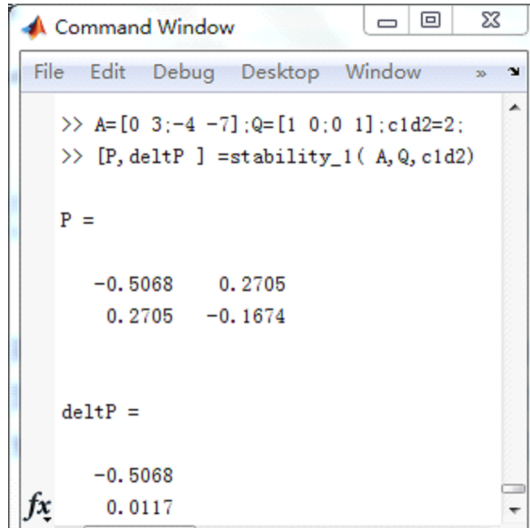
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.5068 & 0.2705 \\ 0.2705 & -0.1674 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -0.5068 < 0$$

$$\Delta_2 = 0.0117 > 0$$

可见, \mathbf{P} 是负定实对称矩阵。这与上面的结论是一致的。

表 3.3 MATLAB 人机交互过程及数据表



```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window

>> A=[0 3;-4 -7];Q=[1 0;0 1];cld2=2;
>> [P,deltP] =stability_1( A,Q,cld2)

P =

    -0.5068    0.2705
    0.2705   -0.1674

deltP =

    -0.5068
    0.0117
  
```

必须指出,由于算法的原因, MATLAB 命令函数 dlyap 计算出的 \mathbf{P} 矩阵不完全符合李氏方程,但 \mathbf{P} 矩阵的定号性是正确的。

3.3.2 线性时变离散系统的稳定性分析

线性时变离散系统的齐次状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \quad (3-20)$$

当 $\mathbf{A}(k)$ 非奇异时, $\mathbf{x}_e = 0$ 是唯一平衡状态。

仿照线性定常离散系统 V 函数的选取方法,取

$$V(\mathbf{x}(k), k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \quad (3-21)$$

式中, $\mathbf{P}(k)$ 为正定实对称矩阵。

对上式求一阶前向差分并将状态方程(3-20)代入,可得

$$\begin{aligned}
 \Delta V(\mathbf{x}(k), k) &= V(\mathbf{x}(k+1), k+1) - V(\mathbf{x}(k), k) \\
 &= \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \\
 &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \\
 &= \mathbf{x}^T(k)[\mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k) - \mathbf{P}(k)]\mathbf{x}(k)
 \end{aligned}$$

欲使系统稳定, $\Delta V(\mathbf{x}(k), k)$ 必须负定。

【定理】 线性时变离散系统全局渐近稳定的充分必要条件是: 任给正定实对称矩阵 $\mathbf{Q}(k)$, 存在正定实对称矩阵 $\mathbf{P}(k)$, 使得

$$\mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k) - \mathbf{P}(k) = -\mathbf{Q}(k) \quad (3-22)$$

此时李氏 V 函数及其一阶差分分别为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(k), k) &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \\ \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= -\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

3.4 非线性连续系统的稳定性分析

与线性系统相比,非线性系统的特性要复杂得多,平衡状态也往往不止一个,系统在某一个平衡状态渐近稳定或不稳定,只可能具有局部性质,并不能代表系统稳定或不稳定。

李雅普诺夫稳定性定理给出的判决条件是充分条件,不是充分必要条件,找不到李氏 V 函数,不能断定系统不稳定。因此,能否应用该理论解决稳定性问题,关键在于能否找到李氏 V 函数。

迄今为止,关于非线性系统的李氏 V 函数,尚未有一般性建构方法,只有一些适用于特殊函数和针对特殊问题的建构方法。

3.4.1 克拉索夫斯基(Krasovski)法及其 MATLAB 编程与计算

克拉索夫斯基法(也称雅可比矩阵法)利用 \mathbf{x} 的导函数向量构造 V 函数。

假设非线性系统的齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

且 $\mathbf{F}(0) = 0$, 即 $\mathbf{x}_c = 0$, 如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 关于 \mathbf{x} 存在一阶连续导数, 那么 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的雅可比矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

仿照线性系统李氏 V 函数的构建方法,可预选如下形式的特殊二次型作为 V 函数

$$V(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3-25)$$

显然 $V(\mathbf{x})$ 是正定的, 如果它是系统的李氏 V 函数, 那它的一阶导数必定是负定的。为此, 对上式关于时间 t 求一阶导数并将状态方程(3-23)代入, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \frac{d\mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{dt}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\left[\frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]\mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

于是,根据李雅普诺夫定理和西尔维斯特准则,可得如下定理:

【定理】 非线性系统在 $\mathbf{x}_c = 0$ 渐近稳定的充分条件是: $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的雅可比矩阵与其转置之和

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3-26)$$

负定。此时, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 就是李氏 V 函数。又当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 如果 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 那么系统全局渐近稳定。

克拉索夫斯基法的技术路线比较简单, 但矩阵 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 负定条件比较苛刻, 大多数实际系统难以满足。因此, 只适用于部分特殊的状态方程, 而且定理的判定条件是充分条件, 不是充分必要条件。

将克拉索夫斯基法应用于线性定常连续系统, 可得如下推论:

【推论】 非奇异线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 全局渐近稳定的充分必要条件是: 矩阵

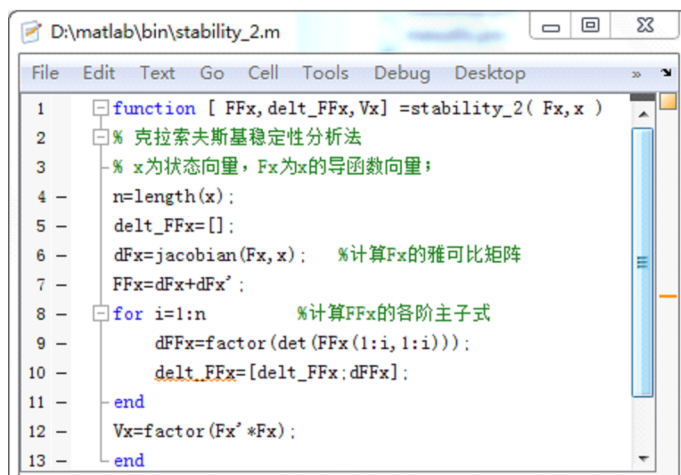
$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \quad (3-27)$$

负定。

应用克拉索夫斯基法实现非线性定常连续系统稳定性分析的一个 MATLAB 通用程序列于表 3.4。该程序定义了一个名为 stability_2 的函数, 函数的形参为 \mathbf{x} 及其导函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 。函数的输出参量为矩阵 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ (程序中用 FFx 表示) 及其各阶主子式 delt_FFx。该程序新应用的 MATLAB 命令语句有:

- jacobian——求函数向量的雅可比矩阵命令语句;
- factor——因式分解命令语句。

表 3.4 用于非线性系统稳定性分析的 MATLAB 通用程序



```

1 function [ FFx,delt_FFx,Vx ]=stability_2( Fx,x )
2 % 克拉索夫斯基稳定性分析法
3 % x为状态向量, Fx为x的导函数向量;
4 n=length(x);
5 delt_FFx=[];
6 dFx=jacobian(Fx,x); %计算Fx的雅可比矩阵
7 FFx=dFx+dFx';
8 for i=1:n %计算FFx的各阶主子式
9     dFFx=factor(det(FFx(1:i,1:i)));
10    delt_FFx=[delt_FFx;dFFx];
11 end
12 Vx=factor(Fx'*Fx);
13 end
  
```

【例 3.4】 假设系统的自由运动方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

试判定系统的稳定性, 并求李氏 V 函数。

解 (1) 常规分析

令

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix} = 0$$

解方程, 可得 $\mathbf{x}_c = 0$ 。

令

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 - 1 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6x_1^2 - 2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & -2x_1^2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 的各阶主子式为

$$\Delta_1 = -6x_1^2 - 2x_2^2 = -2(3x_1^2 + x_2^2) < 0$$

$$\Delta_2 = \det[\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})] = \begin{vmatrix} -6x_1^2 - 2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & -2x_1^2 - 6x_2^2 \end{vmatrix} = 12(x_1^2 + x_2^2)^2 > 0$$

因 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 的一阶主子式为负, 二阶主子式为正, 故矩阵 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 是负定的。根据克拉索夫斯基定理, 该系统在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处渐近稳定。于是, 李雅普诺夫 V 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)]^2 + [-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)]^2$$

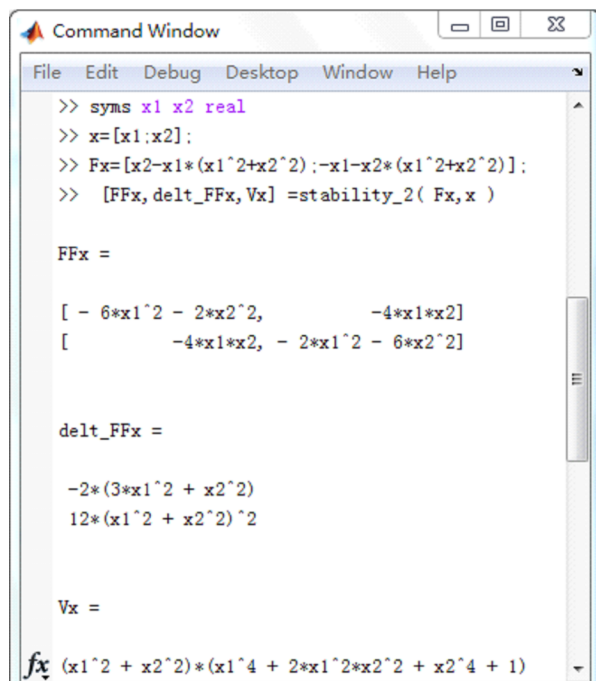
$$= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + 1)$$

又因当 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 所以该系统全局渐近稳定。

(2) MATLAB 辅助分析

实现以上计算的 MATLAB 人机交互过程及数据如表 3.5 所示。从该表可以看出, 计算结果与上面的计算结果完全一致。表中的 FFx 就是 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, delt_FFx 就是 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 的 1 阶和 2 阶主子式。stability_2 是程序表 3.4 中的函数。

表 3.5 应用克拉索夫斯基法的 MATLAB 人机过程及数据



```

>> syms x1 x2 real
>> x=[x1;x2];
>> Fx=[x2-x1*(x1^2+x2^2);-x1-x2*(x1^2+x2^2)];
>> [FFx,delt_FFx,Vx]=stability_2( Fx,x )

FFx =

[ - 6*x1^2 - 2*x2^2,      -4*x1*x2]
[      -4*x1*x2, - 2*x1^2 - 6*x2^2]

delt_FFx =

-2*(3*x1^2 + x2^2)
12*(x1^2 + x2^2)^2

Vx =

fx (x1^2 + x2^2)*(x1^4 + 2*x1^2*x2^2 + x2^4 + 1)

```

3.4.2 变量梯度法

假设 $V(\mathbf{x})$ 为预选的非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_c = 0$ 处的李氏 V 函数,其关于时间的一阶导数为

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \dot{x}_i = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} \quad (3-28)$$

式中, $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 是标量函数 $V(\mathbf{x})$ 的梯度向量,即

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T$$

如果梯度向量 $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 是已知的,那么 $V(\mathbf{x})$ 可由积分而定,即

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i \quad (3-29)$$

根据线积分与路径无关的条件,当梯度向量 $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 的旋度 $\text{rot} \left(\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0$ 时,上式积分与路径无关,即

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i \quad (3-30)$$

欲使旋度 $\text{rot} \left(\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0$, 只须使 $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 的雅可比矩阵对称,即

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

式中, $\frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 。

变量梯度法就是根据以上思路构建的,其具体技术路线是:

(1) 用状态变量的线性组合表示标量函数 $V(\mathbf{x})$ 的梯度向量,称为变量梯度,即假设

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

其中, $a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为待定梯度系数。

(2) 为使式(3-29)积分与路径无关,令梯度向量的雅可比矩阵对称,即

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

其中, $a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 。

由式(3-33)可确定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程,欲完全确定变量梯度系数,尚缺 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个条件。

(3) 按照 $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ 负定条件补充 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个条件。

根据以上(2)和(3)条件,联立解方程组,可确定梯度系数,从而可确定变量梯度。

(4) 将变量梯度式(3-32)代入式(3-30),即可确定 $V(\mathbf{x})$ 。

【例 3.5】 试应用变量梯度法分析例 3.4 系统的稳定性。

解 (1) 假设变量梯度

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E1})$$

(2) 求梯度向量的雅可比矩阵

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V^2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $a_{21} = a_{12}$ 。

(3) 由 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定条件确定梯度系数

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2] \begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \end{aligned}$$

试探取 $a_{12} = a_{21} = 0$,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= a_{11}x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + a_{22}x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2) + (a_{11} - a_{22})x_1x_2 \end{aligned}$$

欲使 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定,只须 $a_{11} = a_{22} = a(a > 0)$ 。于是

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -a(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (\text{E2})$$

(4) 将确定的系数代入式(E1),可得变量梯度

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

确定了 $V(\mathbf{x})$ 的变量梯度后,可确定李氏 V 函数,即

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 \\ &= a \left(\int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 \right) = \frac{1}{2}a(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

因 $V(\mathbf{x})$ 正定, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定,且当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$,所以该系统是全局渐进稳定的。

习 题 3

3-1 应用李雅普诺夫稳定性第二法判定具有下列状态方程的系统的稳定性。如果稳定,求李氏 V 函数。

$$(1) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$(3) \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$(4) \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$(5) \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

3-2 假设系统的齐次状态方程为

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

试应用克拉索夫斯基法分析系统的稳定性。

3-3 假设系统的齐次状态方程为

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

试应用变量梯度法分析系统的稳定性。

3-4 假设系统的齐次状态方程为

$$\dot{x}_1 = ax_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - bx_2^3$$

试问能否通过选择参数 a 和 b 使系统稳定?若能使系统稳定,求李氏 V 函数。

第4章 控制系统的能控性与能观测性

内容提示:本章论证控制系统的能控性与能观测性,包括定常连续和定常离散、时变连续3种线性系统的能控性与能观测性判据、能控与能观测规范型的实现、对偶性原理、线性定常系统能控能观测结构分解及有关能控能观测性的 MATLAB 编程与计算等。

系统的能控性指的是系统状态变量和输出量能用输入量予以控制的特性,能观测性指的是系统状态变量能通过输出量实现观测的特性。

状态反馈是现代控制理论实现系统综合的主要方式,如果状态变量不能被输入量控制,那么状态反馈就无意义,系统综合也就无从谈起。系统的输出量是系统的被控制量,如果输出量不能被输入量控制,那么系统的控制功能就无法实现。因此,能控性问题是系统分析与综合的基本问题之一。

与稳定性一样,能控性是系统本身的固有属性,只与系统本身的结构及参数有关,与具体的输入量无关。

通过状态反馈实现系统综合的前提条件是状态信号能够在物理上引出来。然而,在许多情况下,系统的状态变量只具有数学意义,没有物理意义,无法取出信号。如果通过量测输出量而能观测到状态变量,那就可通过输出反馈实现与状态反馈相同的功能。特别在第5章介绍的状态重构器设计中,只有状态能观测,才能实现状态重构。因此,能观测性问题是系统分析与综合的又一基本问题。

与能控性一样,能观测性也是系统本身的固有属性,只与系统本身的结构及参数有关,与具体的输出量无关。

系统的能控性与能观测性是卡尔曼(Kalman)于20世纪60年代提出的,是实现最优控制 and 最优估值及其他系统综合与校正的必要条件。

4.1 系统的能控性

4.1.1 线性时变连续系统的状态能控性

【定义】 假设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4-1)$$

对于任意非零初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$,如果存在容许控制 $\mathbf{u}(t)$,能在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 将其转移到状态空间原点,即 $\mathbf{x}(t_f) = 0$,则称系统在 t_0 时刻是状态能控的。

对于任意的初始时刻 t_0 ,如果系统都是状态能控的,则称系统是状态完全能控的,简称系统状态能控,并记为 $\sum(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$ 能控。

定义中的容许控制 $\mathbf{u}(t)$ 指的是在物理上可实现的控制信号,在数学上是每个分量在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 平方可积,即

$$\int_{t_0}^{t_f} |u_i(t)|^2 dt \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (4-2)$$

收敛。

在上面的定义中,状态能控与否取决于能否用容许控制把任意非零初始状态转移到状态空间原点,而不是把零初始状态转移到指定的任意目标状态。若存在容许控制在有限时区把零初始状态转移到指定的任意目标状态,则称系统是状态能达的。对于定常系统来说,能控性与能达性两者是等价的,对于时变系统来说,由于系统的结构参数随时间变化,故两者是不完全等价的。

上面的定义没有涉及输出方程,这表明系统状态能否控制与输出没有关系,这是不言而喻的。能控性分析是从输入端考察状态,自然与输出无涉。

下面论证系统的能控性判据,首先直接引入两个数学定理。

【引理 1】 在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$, 连续的方阵 $\mathbf{F}(t)$ 行线性无关等价于格拉姆(Gram) 矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{F}(t) \mathbf{F}^T(t) dt \quad (4-3)$$

非奇异。

【引理 2】 在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$, 具有 $n-1$ 阶连续导数的方阵 $\mathbf{F}(t)$ 行线性无关等价于

$$\mathbf{M}(t) = [\mathbf{F}(t) \quad \dot{\mathbf{F}}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t)] \quad (4-4)$$

行满秩,即

$$\text{rank}(\mathbf{M}(t)) = n \quad (4-5)$$

【判据 1】 线性时变系统 $\sum (\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$ 在 t_0 时刻状态能控的充分必要条件是:在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$, 矩阵 $\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$ 行线性无关或格拉姆矩阵

$$\mathbf{W}_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \quad (4-6)$$

非奇异。

证明 根据引理 1, $\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$ 行线性无关与格拉姆矩阵 $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$ 非奇异是等价的。

(1) 充分性

由线性时变系统状态方程的解和状态转移矩阵的性质可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt \\ &= \Phi(t_f, t_0) \left[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt \right] \end{aligned}$$

因 $\mathbf{W}_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt$ 非奇异,故 $\mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f)$ 存在。

选取

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0)$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \Phi(t_f, t_0) \left[\mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0) dt \right] \\ &= \Phi(t_f, t_0) [\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{W}_c(t_0, t_f) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0)] = 0 \end{aligned}$$

这表明,只要式(4-6)定义的格拉姆矩阵非奇异,必存在将任意非零初始状态转移到状态空间原点的容许控制。

充分性证毕。

(2) 必要性

兹用反证法证明。

假定矩阵 $\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$ 行线性相关而系统状态能控。

当 $\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$ 行线性相关时, 必存在非零向量 α , 使

$$\alpha^T \mathbf{F}(t) = \alpha^T \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t) = 0 \quad (4-7)$$

又因系统状态能控, 故

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)dt = 0 \\ \mathbf{x}(t_0) &= -\Phi(t_0, t_f) \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)dt \end{aligned}$$

将上式两边乘以 α^T 并由式(4-7), 可得

$$\alpha^T \mathbf{x}(t_0) = -\int_{t_0}^{t_f} \alpha^T \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)dt = 0$$

上式成立的条件是, 或者 $\alpha = 0$, 或者 $\mathbf{x}(t_0) = 0$, 二者必居其一。而这与 $\mathbf{x}(t_0)$ 任意及 α 非零两者相矛盾。表明 $\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$ 行线性相关而系统状态能控不成立。

必要性证毕。

【判据 2】 当 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 存在 $n-1$ 阶连续导数时, 系统 $\sum(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$ 在 t_0 时刻状态能控的充分必要条件是: 在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$, 矩阵

$$\mathbf{M}_c(t) = [\mathbf{B}_0(t) \quad \mathbf{B}_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{n-1}(t)] \quad (4-8)$$

行满秩, 即

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c(t)) = n \quad (4-9)$$

式中

$$\mathbf{B}_0(t) = \mathbf{B}(t) \quad (4-10)$$

$$\mathbf{B}_k(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{B}_{k-1}(t) + \frac{d\mathbf{B}_{k-1}(t)}{dt} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) \quad (4-11)$$

$\mathbf{M}_c(t)$ 称为系统的能控性矩阵。

证明 令

$$\mathbf{F}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$$

对上式关于时间 t 求一阶、二阶、直至 $n-1$ 阶导数并将式(2-54) 和式(4-11) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(t) &= \dot{\Phi}(t_0, t)\mathbf{B}(t) + \Phi(t_0, t)\dot{\mathbf{B}}(t) \\ &= -\Phi(t_0, t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + \Phi(t_0, t)\dot{\mathbf{B}}(t) \\ &= \Phi(t_0, t)[- \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)] \\ &= \Phi(t_0, t)\mathbf{B}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{F}}(t) &= \dot{\Phi}(t_0, t)\mathbf{B}_1(t) + \Phi(t_0, t)\dot{\mathbf{B}}_1(t) \\ &= -\Phi(t_0, t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}_1(t) + \Phi(t_0, t)\dot{\mathbf{B}}_1(t) \\ &= \Phi(t_0, t)[- \mathbf{A}(t)\mathbf{B}_1(t) + \dot{\mathbf{B}}_1(t)] \end{aligned}$$

$$= \Phi(t_0, t) B_2(t)$$

.....

$$F^{(n-1)}(t) = \Phi(t_0, t) B_{n-1}(t)$$

将以上系列式代入式(4-4),得

$$\begin{aligned} M(t) &= [F(t) \quad \dot{F}(t) \quad \cdots \quad F^{(n-1)}(t)] \\ &= \Phi(t_0, t) [B_0(t) \quad B_1(t) \quad \cdots \quad B_{n-1}(t)] \\ &= \Phi(t_0, t) M_c(t) \end{aligned}$$

因 $\Phi(t_0, t)$ 非奇异,故

$$\text{rank}(M(t)) = \text{rank}(M_c(t)) \quad (4-12)$$

根据引理 2,当上式行满秩时,必有 $F(t) = \Phi(t_0, t) B(t)$ 行线性无关,进而根据判据 1,系统状态能控。

【例 4.1】 假设系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 - e^{-t} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + e^{-2t} \end{bmatrix} u$$

试分析其能控性。

解

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} -2 - e^{-t} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ b_0(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + e^{-2t} \end{bmatrix} \\ b_1(t) &= -A(t)b_0(t) + \frac{db_0(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 + e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} \end{bmatrix} \\ M_c(t) &= [b_0(t) \quad b_1(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 + e^{-t} \\ 1 + e^{-2t} & 1 - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\det(M_c(t)) = -1 - e^{-t} - 3e^{-2t} - e^{-3t}$, 当 $t > 0$ 时, $\text{rank}(M_c(t)) = 2$, 所以该系统是状态能控的。

4.1.2 线性定常连续系统的状态能控性及其 MATLAB 辅助分析

线性定常系统是线性时变系统的特例,毫无疑问,所有线性时变系统理论均适用于线性定常系统,且线性定常系统的状态能控性与初始时刻无关。

1. 基本判据 —— 秩判据

将线性定常系统的常数矩阵 A 和 B 代入式(4-8) ~ 式(4-11),可得能控性矩阵

$$M = [B \quad -AB \quad A^2B \quad \cdots \quad (-A)^{n-1}B]$$

该矩阵与矩阵

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (4-13)$$

具有相同的秩。因此,将上式定义为线性定常系统的能控性矩阵。于是可得如下秩判据:

线性定常系统 $\sum(A, B)$ 状态能控的充分必要条件是 its 能控性矩阵行满秩,即

$$\text{rank}(M_c) = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n \quad (4-14)$$

【例 4.2】 试分析能控规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$ 的能控性, 其中

$$\mathbf{A}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解 系统的能控性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b}_{c1} \quad \mathbf{A}_{c1}\mathbf{b}_{c1} \quad \mathbf{A}_{c1}^2\mathbf{b}_{c1} \quad \mathbf{A}_{c1}^3\mathbf{b}_{c1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & -10 & 101 \\ 1 & -10 & 101 & -1025 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 4$$

因能控性矩阵行满秩, 故该能控规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$ 状态能控。

【例 4.3】 试分析能控规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 的能控性, 其中

$$\mathbf{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解 系统的能控性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b}_{c2} \quad \mathbf{A}_{c2}\mathbf{b}_{c2} \quad \mathbf{A}_{c2}^2\mathbf{b}_{c2} \quad \mathbf{A}_{c2}^3\mathbf{b}_{c2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 4$$

因能控性矩阵行满秩, 故该能控规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 状态能控。

【例 4.4】 试分析约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b})$ 的能控性, 其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解 系统的能控性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{J}\mathbf{b} \quad \mathbf{J}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{J}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & -12 & 54 \\ 2 & -6 & 18 & -54 \\ -1 & 5 & -25 & 125 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 4$$

因能控性矩阵行满秩, 故该约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b})$ 状态能控。

2. 关于能控规范型的判据

能控规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$ 和能控规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 状态能控。

该判据的正确性只须将 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$ 和 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 两种能控规范型的有关系数矩阵代入式(4-14) 即可得到证明。事实上例 4.2 和例 4.3 就是佐证。

3. 关于约当规范型的判据

约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{B})$ 状态能控的充分必要条件是:

$$(1) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \text{ 中每个约当小块 } \mathbf{J}_i \text{ 对应的特征值 } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, r) \text{ 互异;}$$

(2) \mathbf{B} 中与每个约当小块 $\mathbf{J}_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 最后一行同行的元素不全为零。

本判据的正确性可用秩判据进行证明。事实上例 4.4 就是佐证, 现再举一例。

【例 4.5】 试分析约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{B})$ 的能控性, 其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

解 系统矩阵 \mathbf{J} 含两个约当小块, 即

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

这两个约当小块对应的特征值互异, 分别为 -3 和 -5 , 又在控制矩阵 \mathbf{B} 中, 与两个约当小块的最后一行同行的元素不全为 0, 故该约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{B})$ 状态能控。

为了验证约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{B})$ 状态能控性, 再来考察能控性矩阵及其秩。

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{JB} \quad \mathbf{J}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{J}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 24 & 0 & -108 & 0 \\ -4 & 0 & 12 & 0 & -36 & 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -100 & 0 & 750 \\ 0 & 10 & 0 & -50 & 0 & 250 & 0 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 4$$

4. 关于对角线规范型的判据

对角线规范型系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 状态能控的充分必要条件是:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \text{ 且 } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 互异;}$$

(2) \mathbf{B} 中无全零元素的行。

对角线规范型是约当规范型的特例, 判据 4 也是判据 3 的特例。

5. 运用 MATLAB 进行能控性分析

MATLAB 提供了计算系统能控性矩阵及求秩运算命令 ctrb 和 rank, 其调用格式为:

$$\mathbf{M}_c = \text{ctrb}(\mathbf{A} \ \mathbf{B})$$

$$\mathbf{R} = \text{rank}(\mathbf{M}_c)$$

运用 MATLAB 分析例 4.5 的人机交互过程及数据如表 4.1 所示。

表 4.1 实现能控性分析的 MATLAB 人机交互过程及数据

```

>> J=[-3 1 0 0;0 -3 0 0;0 0 -5 1;0 0 0 -5];B=[0 0;-4 0;0 0;10];
>> Mc=ctrb(J,B)

Mc =

     0     0    -4     0    24     0   -108     0
    -4     0    12     0   -36     0    108     0
     0     0     0    10     0   -100     0    750
     0    10     0   -50     0    250     0   -1250

>> R=rank(Mc)

R =

     4
  
```

4.1.3 线性离散系统的状态能控性

与连续系统一样,离散系统的状态能控性与输出量无关,其定义可从线性连续系统直接移植而来。

【定义】 假设线性时变离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

对于任意非零初始状态 $\mathbf{x}(k_0)$, 如果存在容许控制序列 $\mathbf{u}(k)$, 能在有限采样点区间 $k \in [k_0, k_N]$ 将其转移到状态空间原点, 即 $\mathbf{x}(k_N) = 0$, 则称系统在第 k_0 步采样是状态能控的。

对于任意的初始采样节点 k_0 , 如果系统都是状态能控的, 则称系统是状态完全能控的, 简称系统状态能控, 并记为 $\sum(\mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k))$ 能控。

与线性定常连续系统类似, 线性定常离散系统的状态能控性与初始采样节点 k_0 无关。

线性定常离散系统的状态能控性判据可从线性定常连续系统直接移植而来。上面线性连续系统的所有能控性判据均适用于线性定常离散系统。因此, 不再重复列举。

【例 4.6】 假设离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

试分析其能控性。

解 本例系统为对角线规范型, 因系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值互异, 分别为 -3 、 -2 、 -5 和 10 , 控制矩阵 \mathbf{B} 没有全 0 元素的行, 故它是状态能控的。其能控性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 & 9 & 9 & -27 & -27 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -16 & 0 & 32 & 0 \\ 6 & 0 & -30 & 0 & 150 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 20 & 0 & 200 & 0 & 2000 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 4$$

4.1.4 系统的输出能控性

系统的输出能控性指的是输出量能通过输入量实现控制的特性。输出能控性与状态能控性之间无必然因果关系。

1. 输出能控性定义

假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

对于任意初始输出 $\mathbf{y}(t_0)$, 如果存在容许控制 $\mathbf{u}(t)$, 能在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 将其转移到任意的指定输出 $\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{y}_f$, 则称系统在 t_0 时刻是输出能控的。

对于任意的初始时刻 t_0 , 如果系统都是输出能控的, 则称系统是输出完全能控的。

线性定常系统的输出能控性与初始时刻 t_0 无关。

2. 线性定常连续系统的输出能控性判据

q 输出线性定常连续系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 输出能控的充分必要条件是

$$\mathbf{M}_{yc} = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] \quad (4-15)$$

行满秩, 即 $\text{rank}(\mathbf{M}_{yc}) = q$ 。

式中, \mathbf{M}_{yc} 称为系统的输出能控性矩阵。

4.2 系统的能观测性

4.2.1 线性时变连续系统的能观测性

【定义】 假设系统状态方程与输出方程分别为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$$

对于任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 如果能根据有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 的输出 $\mathbf{y}(t)$ 唯一确定, 则称系统在 t_0 时刻是状态能观测的。

对于任意的初始时刻 t_0 , 如果系统都是状态能观测的, 则称系统是状态完全能观测的, 简称系统状态能观测, 记为 $\sum(\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$ 能观测。

线性定常系统的状态能观测性与初始时刻 t_0 无关。

上面的定义没有涉及输入量, 这表明系统状态能否观测与输入没有关系。这是不言而喻的, 能观测性分析是从输出端考察状态, 自然与输入无涉。

线性时变系统能观测性分析方法与其能控性分析方法类似。下面直接给出判据而不加证明。

【判据 1】 线性时变系统 $\sum(A(t), C(t))$ 在 t_0 时刻状态能观测的充分必要条件是:在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$, 矩阵 $F(t) = C(t)\Phi(t, t_0)$ 列线性无关或格拉姆矩阵

$$W_o(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (4-16)$$

非奇异。

【判据 2】 当 $A(t)$ 和 $C(t)$ 存在 $n-1$ 阶的连续导数时, 系统 $\sum(A(t), C(t))$ 在 t_0 时刻状态能观测的充分必要条件是:

$$M_o(t) = \begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

列满秩, 即

$$\text{rank}(M_o(t)) = n \quad (4-18)$$

式中

$$C_0(t) = C(t) \quad (4-19)$$

$$C_k(t) = C_{k-1}(t)A(t) + \frac{dC_{k-1}(t)}{dt} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4-20)$$

$M_o(t)$ 称为系统的能观测性矩阵。

【例 4.7】 假设系统的系统矩阵与输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad e^{-5t}]$$

试分析能观测性。

解

$$C_0 = C = [1 \quad 0 \quad e^{-5t}]$$

$$C_1 = C_0 A + \frac{dC_0}{dt} = [1 - e^{-2t} \quad 1 \quad -3e^{-5t}]$$

$$C_2 = C_1 A + \frac{dC_1}{dt} = [2e^{-2t} + (e^{-2t} - 1)^2 \quad 2 - e^{-2t} \quad 9e^{-5t}]$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-5t} \\ 1 - e^{-2t} & 1 & -3e^{-5t} \\ 2e^{-2t} + (e^{-2t} - 1)^2 & 2 - e^{-2t} & 9e^{-5t} \end{bmatrix}$$

因 $\det(M_o) = 2e^{-7t}(8e^{2t} - 3)$, 当 $t > 0$ 时, $\det(M_o) \neq 0$, $\text{rank}(M_o) = 3$, 故该系统是状态能观测的。

4.2.2 线性定常连续系统的状态能观测性及其 MATLAB 辅助分析

将常数矩阵 A 和 C 代入式(4-17) ~ 式(4-20), 容易推导出关于能观测性的秩判据。

1. 基本判据 —— 秩判据

线性定常系统 $\sum(A, C)$ 状态能观测的充分必要条件是其能观测性矩阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

列满秩,即

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = n \quad (4-22)$$

【例 4.8】 试分析能观测规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 的状态能观测性,其中

$$\mathbf{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{o1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

解 系统的能观测性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{o1} \\ \mathbf{C}_{o1}\mathbf{A}_{o1} \\ \mathbf{C}_{o1}\mathbf{A}_{o1}^2 \\ \mathbf{C}_{o1}\mathbf{A}_{o1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 4$$

因能观测性矩阵列满秩,故该能观测规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 状态能观测。

【例 4.9】 试分析能观测规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 的状态能观测性,其中

$$\mathbf{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{o2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

解 系统的能观测性矩阵及其秩分别为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{o2} \\ \mathbf{C}_{o2}\mathbf{A}_{o2} \\ \mathbf{C}_{o2}\mathbf{A}_{o2}^2 \\ \mathbf{C}_{o2}\mathbf{A}_{o2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & -10 & 101 \\ 1 & -10 & 101 & -1025 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 4$$

因能观测性矩阵列满秩,故该能观测规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 状态能观测。

2. 关于能观测规范型的判据

能观测规范 I 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 和能观测规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 状态能观测。

该判据的正确性只须将 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 和 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 两种能观测规范型的有关系数矩阵代入式(4-21)和式(4-22)即可得到证明。事实上,例 4.8 和例 4.9 就是佐证。

3. 关于约当规范型的判据

约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{C})$ 状态能观测的充分必要条件是:

$$(1) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \text{ 中每个约当小块 } \mathbf{J}_i \text{ 对应的特征值 } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, r) \text{ 互异};$$

(2) \mathbf{C} 中与每个约当小块 $\mathbf{J}_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 第一列同列的元素不全为零。

【例 4.10】试分析约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{C})$ 的能观测性, 其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

解 系统矩阵 \mathbf{J} 含两个约当小块, 即

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

这两个约当小块对应的特征值互异, 分别为 -3 和 -5 , 又在观测矩阵 \mathbf{C} 中, 与两个约当小块的第一列同列的元素不全为 0, 故该约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{C})$ 状态能观测。

为了验证约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{C})$ 状态能观测性, 再来考察能观测性矩阵及其秩。

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CJ} \\ \mathbf{CJ}^2 \\ \mathbf{CJ}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 10 \\ 18 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & -100 \\ -54 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1250 & 750 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 4$$

4. 关于对角线规范型的判据

对角线规范型系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 状态能观测的充分必要条件是:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \text{ 且 } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 互异};$$

(2) \mathbf{C} 中无全零元素的列。

5. 运用 MATLAB 进行能观测性分析

MATLAB 提供了计算系统能观测性矩阵的命令 `obsv`, 其调用格式是:

$$\mathbf{M}_o = \text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$$

运用 MATLAB 分析例 4.10 的人机交互过程及数据如表 4.2 所示。

表 4.2 实现能观测性分析的 MATLAB 人机交互过程及数据

```

>> J=[-3 1 0 0;0 -3 0 0;0 0 -5 1;0 0 0 -5];C=[2 0 0 0;0 10 0 0];
>> Mo=obsv(J,C)

Mo =

     2     0     0     0
     0     0    10     0
    -6     2     0     0
     0     0   -50    10
    18    -12     0     0
     0     0    250   -100
   -54    54     0     0
     0     0  -1250    750

>> R=rank(Mo)

R =

     4
  
```

4.2.3 线性定常离散系统的状态能观测性

与连续系统一样,离散系统的状态能观测性与输入量无关。

与线性定常连续系统类似,线性定常离散系统的状态能观测性与初始采样节点 k_0 无关。

线性定常离散系统的状态能观测性定义和判据可从线性定常连续系统直接移植而来。上面线性连续系统的所有能观测性判据均适用于线性定常离散系统。因此,不再重复列举。

【例 4.11】 假设离散系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

试分析其能观测性。

解 本例系统为对角线规范型,因系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值互异,分别为 -3 、 -2 、 -5 和 10 ,观测矩阵 \mathbf{C} 没有全 0 元素的列,故它是状态能观测的,其能观测性矩阵及其秩如表 4.3 所示。

表 4.3 实现能观测性分析的 MATLAB 人机交互过程及数据

```

>> A=[-3 0 0 0;-2 0 0 0;-5 0 0 0;10 0 0 0];C=[2 0 0 1;0 1 10 0];
>> Mo=obsv(A,C)

Mo =

     2     0     0     1
     0     1    10     0
    -6     0     0    10
     0    -2   -50     0
    18     0     0    100
     0     4    250     0
   -54     0     0   1000
     0    -8  -1250     0

>> R=rank(Mo)

R =

     4
  
```

4.3 能控与能观测规范型的实现

单输入单输出线性定常系统的两种能控规范型是状态能控的,两种能观测规范型是状态能观测的。那么,状态能控的任意单输入单输出系统能否化为两种能控规范型?状态能观测的任意系统能否化为两种能观测规范型?回答是肯定的。

4.3.1 能控规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算

1. 能控规范 I 型的实现

对于状态能控的任意单输入单输出线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, 经如下线性变换可将其变换为能控规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$, 即

$$\mathbf{A}_{c1} = \mathbf{T}_{c1}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{c1} \quad (4-23)$$

$$\mathbf{b}_{c1} = \mathbf{T}_{c1}^{-1} \mathbf{b} \quad (4-24)$$

$$\mathbf{T}_{c1} = [\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \mathbf{b}] \quad (4-25)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ddots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

式中

$$\mathbf{A}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 是系统矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式系数, 即

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

2. 能控规范 II 型的实现

对于状态能控的任意单输入单输出线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, 经如下线性变换可将其变换为能控规范 II 型 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$, 即

$$\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{c2} \quad (4-26)$$

$$\mathbf{b}_{c2} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{b} \quad (4-27)$$

$$\mathbf{T}_{c2} = \mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \quad (4-28)$$

式中

$$\mathbf{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

【例 4.12】 试分析约当规范型系统 $\sum(J, b, C)$ 的能控性, 其中

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

又当系统状态能控时, 将其化为两种能控规范型。

解 (1) 能控性分析

因系统矩阵为约当矩阵, 有两个约当小块, 其对应的特征值互异, 分别为 -3 和 -5 , 又在控制矩阵 b 中, 与两个约当小块最后一行同行的元素不为 0, 故该约当规范型 $\sum(J, b, C)$ 状态能控。

(2) 将约当规范型 $\sum(J, b, C)$ 化为能控规范 I 型 $\sum(A_{c1}, b_{c1})$

$$D(s) = \det(sI - J) = s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 162s + 135$$

变换矩阵为

$$T_{c1} = [J^3 b \quad J^2 b \quad Jb \quad b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 0 \\ 72 & 14 & 1 & 0 \\ 162 & 72 & 14 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 30 & 16 & 2 & 0 \\ 90 & 78 & 22 & 2 \\ 162 & 162 & 54 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{48} \\ \frac{9}{4} & -\frac{21}{8} & \frac{25}{16} & -\frac{25}{48} \\ -\frac{27}{4} & \frac{81}{8} & -\frac{117}{16} & \frac{125}{48} \end{bmatrix}$$

进行线性变换, 可得

$$A_{c1} = T_{c1}^{-1} J T_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -135 & -162 & -72 & -14 \end{bmatrix} \quad b_{c1} = T_{c1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{c1} = C T_{c1} = [172 \quad 164 \quad 54 \quad 6]$$

(3) 将约当规范型 $\sum(J, b, C)$ 化为能控规范 II 型 $\sum(A_{c2}, b_{c2})$

变换矩阵为

$$T_{c2} = M_c = [b \quad Jb \quad J^2 b \quad J^3 b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & -12 & 54 \\ 2 & -6 & 18 & -54 \\ 6 & -30 & 150 & -750 \end{bmatrix}$$

$$T_{c2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{54}{4} & -\frac{15}{8} & \frac{35}{16} & -\frac{9}{16} \\ \frac{39}{4} & -\frac{23}{8} & \frac{27}{16} & -\frac{9}{16} \\ \frac{11}{4} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{48} \end{bmatrix}$$

进行线性变换,可得

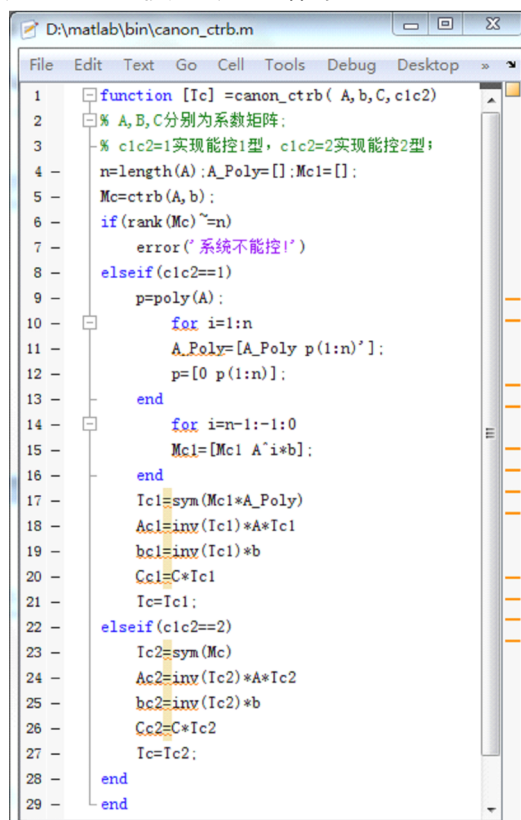
$$A_{c2} = T_{c2}^{-1} J T_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -135 \\ 1 & 0 & 0 & -162 \\ 0 & 1 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{bmatrix} \quad b_{c2} = T_{c2}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{c2} = C T_{c2} = [6 \quad -30 \quad 152 \quad -768]$$

3. 实现能控规范型的 MATLAB 编程与计算

运用 MATLAB 将任意状态能控系统转换为能控规范型的一个通用程序列于表 4.4。该程序的函数名为 canon_ctrb,其形参有系数矩阵 A 、 b 、 C 和实现规范 I 型或 II 型运算的选择开关量 c1c2。当 c1c2 = 1 时,实现的是能控规范 I 型;当 c1c2 = 2 时,实现的是能控规范 II 型。程序中新应用的 MATLAB 命令语句只有 poly,它是求多项式系数的命令语句,poly(A) 表示求矩阵 A 的特征多项式系数矩阵。

表 4.4 实现能控规范型运算的 MATLAB 通用程序



```

D:\matlab\bin\canon_ctrb.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop »
1 function [Tc] = canon_ctrb( A, b, C, c1c2)
2 % A, B, C分别为系数矩阵;
3 % c1c2=1实现能控I型, c1c2=2实现能控2型;
4 n=length(A); A_Poly=[]; Mc1=[];
5 Mc=ctrb(A, b);
6 if(rank(Mc)~=n)
7     error('系统不能控!')
8 elseif(c1c2==1)
9     p=poly(A);
10     for i=1:n
11         A_Poly=[A_Poly p(1:n)'];
12         p=[0 p(1:n)];
13     end
14     for i=n-1:-1:0
15         Mc1=[Mc1 A^i*b];
16     end
17     Tc1=sym(Mc1*A_Poly)
18     Ac1=inv(Tc1)*A*Tc1
19     bc1=inv(Tc1)*b
20     Cc1=C*Tc1
21     Tc=Tc1;
22 elseif(c1c2==2)
23     Tc2=sym(Mc)
24     Ac2=inv(Tc2)*A*Tc2
25     bc2=inv(Tc2)*b
26     Cc2=C*Tc2
27     Tc=Tc2;
28 end
29 end

```

在 Command Window 人机交互窗口,输入系统的系数矩阵和开关量 c1c2,再调用该程序函数,MATLAB 迅即完成计算并输出线性变换矩阵和能控规范型的各系数矩阵。

应用表 4.4 程序实现例 4.12 能控规范 I 型和 II 型的 MATLAB 人机交互过程及其数据分别如表 4.5 和表 4.6 所示。这两表所列 MATLAB 编程计算与上面的人工计算互为对证。

表 4.5 实现能控 I 型的 MATLAB 过程及数据

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> J=[-3 1 0 0:0 -3 1 0:0 0 -3 0:0 0 0 -5];
>> b=[0:0:2:6];C=[1 0 0 1];c1c2=1;
>> [Tc] =canon_ctrb( J,b,C,c1c2)

Tc1 =

    10,     2,     0,     0
    30,    16,     2,     0
    90,    78,    22,     2
   162,   162,    54,     6

Ac1 =

     0,     1,     0,     0
     0,     0,     1,     0
     0,     0,     0,     1
   -135,  -162,   -72,  -14

bc1 =

     0
     0
     0
     1

Cc1 =

fx [ 172, 164, 54, 6]

```

表 4.6 实现能控 II 型的 MATLAB 过程及数据

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> J=[-3 1 0 0:0 -3 1 0:0 0 -3 0:0 0 0 -5];
>> b=[0:0:2:6];C=[1 0 0 1];c1c2=2;
>> [Tc] =canon_ctrb( J,b,C,c1c2)

Tc2 =

     0,     0,     2,   -18
     0,     2,   -12,    54
     2,    -6,    18,   -54
     6,   -30,   150,  -750

Ac2 =

     0,     0,     0,  -135
     1,     0,     0,  -162
     0,     1,     0,   -72
     0,     0,     1,   -14

bc2 =

     1
     0
     0
     0

Cc2 =

fx [ 6, -30, 152, -768]

```

必须指出,MATLAB 提供了实现能控规范型的命令语句 canon,其调用格式为:

$$[\text{ctrb2}, T_{c2}] = \text{canon}(\text{ss}(A,b,C,D), 'companion')$$

其中, T_{c2} 为实现能控规范型的线性变换矩阵。

canon 命令实现的能控规范型是能控规范 II 型,采用的线性变换为 $z = T_{c2}x$ 。因此,变换前后系统的系数矩阵之间的关系为

$$A_{c2} = T_{c2}AT_{c2}^{-1} \tag{4-29}$$

$$b_{c2} = T_{c2}b \tag{4-30}$$

$$C_{c2} = CT_{c2}^{-1} \tag{4-31}$$

4.3.2 能观测规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算

1. 能观测规范 I 型的实现

对于状态能观测的任意单输入单输出线性定常系统 $\sum(A,C)$,经如下线性变换可将其变

换为能观测规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$, 即

$$\mathbf{A}_{o1} = \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{o1} \quad (4-32)$$

$$\mathbf{C}_{o1} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{o1} \quad (4-33)$$

$$\mathbf{T}_{o1}^{-1} = \mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

式中

$$\mathbf{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{o1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

2. 能观测规范 II 型的实现

对于状态能观测的任意单输入单输出线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{C})$, 经如下线性变换可将其变换为能观测规范 II 型系统 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$, 即

$$\mathbf{A}_{o2} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{o2} \quad (4-35)$$

$$\mathbf{C}_{o2} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{o2} \quad (4-36)$$

$$\mathbf{T}_{o2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

式中

$$\mathbf{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{o2} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 意义同前。

【例 4.13】 试分析例 4.12 约当规范型系统 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 的能观测性。当系统状态能观测时, 将其化为两种能观测规范型。

解 (1) 能观测性分析

因系统矩阵为约当矩阵, 有两个约当小块, 其对应的特征值互异, 分别为 -3 和 -5 , 又在观测矩阵 \mathbf{C} 中, 与两个约当小块的第一列同列的元素不全为 0, 故该约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 状态能观测。

(2) 将约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 化为能观测规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$

变换矩阵为

$$\mathbf{T}_{o1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 9 & -6 & 1 & 25 \\ -27 & 27 & -9 & -125 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{o1} = \begin{bmatrix} \frac{35}{8} & \frac{27}{8} & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{23}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{45}{2} & \frac{39}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{27}{8} & -\frac{27}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

进行线性变换, 可得

$$\mathbf{A}_{o1} = \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -135 & -162 & -72 & -14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{o1} = \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -30 \\ 152 \\ -768 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{o1} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{o1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

(3) 将约当规范型 $\sum(\mathbf{J}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 化为能观测规范 II 型 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$

系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{J}) = s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 162s + 135$$

变换矩阵为

$$\mathbf{T}_{o2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 72 & 162 \\ 0 & 1 & 14 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{CJ}^3 \\ \mathbf{CJ}^2 \\ \mathbf{CJ} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 15 & 5 & 27 \\ 39 & 8 & 1 & 27 \\ 11 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{o2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{117}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{21}{4} & \frac{81}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{27}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{25}{8} & \frac{125}{8} \end{bmatrix}$$

进行线性变换, 可得

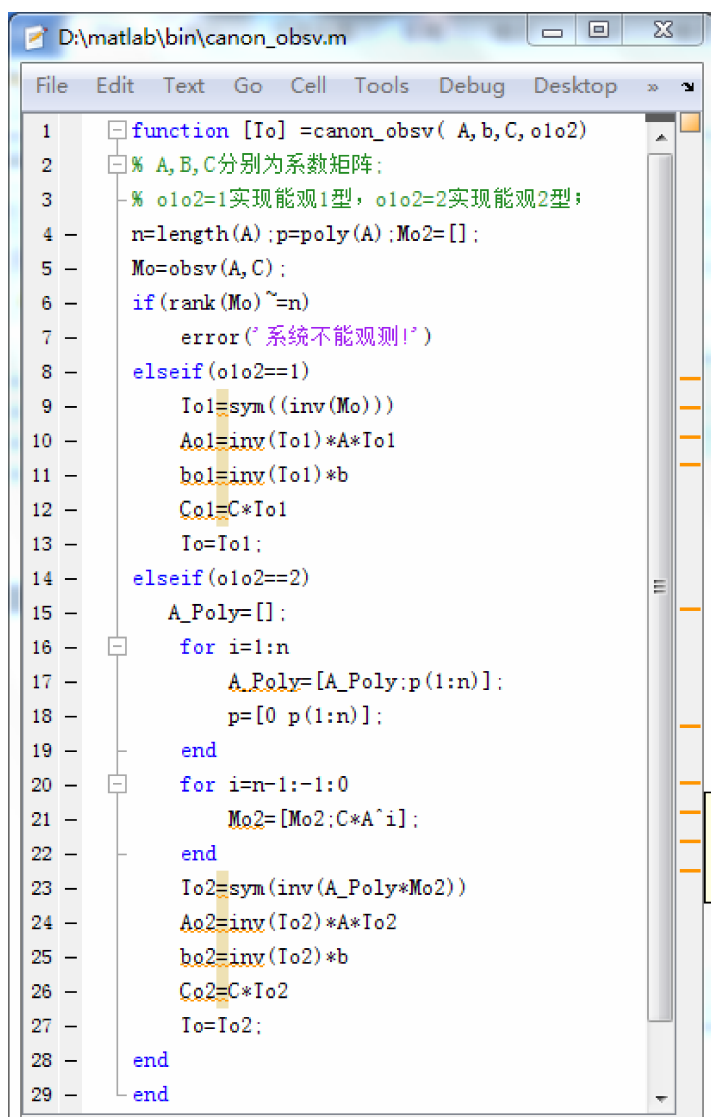
$$\mathbf{A}_{o2} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -135 \\ 1 & 0 & 0 & -162 \\ 0 & 1 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{o2} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 172 \\ 164 \\ 54 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{o2} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{o2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

3. 实现能观测规范型的 MATLAB 编程与计算

将任意状态能观测系统转换为能观测规范型的 MATLAB 通用程序列于表 4.7。该程序定义了一个名为 canon_obsrv 的函数,其形参有系数矩阵 A 、 b 、 C 和实现规范 I 型或 II 型运算的选择开关量 olo2。当 olo2 = 1 时,实现的是能观测规范 I 型;当 olo2 = 2 时,实现的是能观测规范 II 型。

表 4.7 实现能观测规范型运算的 MATLAB 通用程序

The image shows a screenshot of a MATLAB script editor window titled 'D:\matlab\bin\canon_obsrv.m'. The editor has a menu bar with 'File', 'Edit', 'Text', 'Go', 'Cell', 'Tools', 'Debug', and 'Desktop'. The script content is as follows:

```
1 function [Io] = canon_obsrv( A, b, C, olo2)
2 % A, B, C 分别为系数矩阵;
3 % olo2=1 实现能观1型, olo2=2 实现能观2型;
4 n=length(A); p=poly(A); Mo2=[];
5 Mo=obsrv(A, C);
6 if(rank(Mo)~=n)
7     error('系统不能观测!')
8 elseif(olo2==1)
9     Io1=sym((inv(Mo)))
10    Ao1=inv(Io1)*A*Io1
11    bo1=inv(Io1)*b
12    Co1=C*Io1
13    Io=Io1;
14 elseif(olo2==2)
15    A_Poly=[];
16    for i=1:n
17        A_Poly=[A_Poly;p(1:n)];
18        p=[0 p(1:n)];
19    end
20    for i=n-1:-1:0
21        Mo2=[Mo2;C*A^i];
22    end
23    Io2=sym(inv(A_Poly*Mo2))
24    Ao2=inv(Io2)*A*Io2
25    bo2=inv(Io2)*b
26    Co2=C*Io2
27    Io=Io2;
28 end
29 end
```

在 Command Window 人机交互窗口,输入系统的系数矩阵和开关量 olo2,再调用该程序, MATLAB 迅即完成计算并输出线性变换矩阵和能观测规范型的各系数矩阵。

应用表 4.7 程序实现例 4.13 能观测规范 I 型和 II 型的 MATLAB 人机交互过程及其数据分别如表 4.8 和表 4.9 所示。这两表所列 MATLAB 编程计算与上面的人工计算互为对证。

表 4.8 实现能观测 I 型的 MATLAB 过程及数据

```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> J=[-3 1 0 0;0 -3 1 0;0 0 -3 0;0 0 0 -5];
>> b=[0;0;2;6];C=[1 0 0 1];o1o2=1;
>> Io=canon_observ(J,b,C,o1o2)

Io1 =

[ 35/8, 27/8, 9/8, 1/8]
[ -15/4, -23/4, -9/4, -1/4]
[ 45/2, 39/2, 11/2, 1/2]
[ -27/8, -27/8, -9/8, -1/8]

Ao1 =

[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ -135, -162, -72, -14]

bo1 =

6
-30
152
-768

Co1 =

fx [ 1, 0, 0, 0]
OVR
```

表 4.9 实现能观测 II 型的 MATLAB 过程及数据

```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> J=[-3 1 0 0;0 -3 1 0;0 0 -3 0;0 0 0 -5];
>> b=[0;0;2;6];C=[1 0 0 1];o1o2=2;
>> Io=canon_observ(J,b,C,o1o2)

Io2 =

[ 1/8, -5/8, 25/8, -117/8]
[ -1/4, 5/4, -21/4, 81/4]
[ 1/2, -3/2, 9/2, -27/2]
[ -1/8, 5/8, -25/8, 125/8]

Ao2 =

[ 0, 0, 0, -135]
[ 1, 0, 0, -162]
[ 0, 1, 0, -72]
[ 0, 0, 1, -14]

bo2 =

172
164
54
6

Co2 =

fx [ 0, 0, 0, 1]
OVR
```

4.4 线性定常系统能控性与能观测性在复域[s]中的判据

1. 传递函数矩阵

假设系统的状态空间模型为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4-38a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4-38b}$$

与此状态空间模型对应的传递函数矩阵为

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B \tag{4-39}$$

仿传递函数矩阵的定义,如下定义 u - x 之间和 x - y 之间的传递函数矩阵

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B \tag{4-40}$$

$$W_{xy}(s) = C(sI - A)^{-1} = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \tag{4-41}$$

显然,以上各个传递函数矩阵的分母多项式相同,均为系统的特征多项式,表明它们具有相同的极点。

2. 传递函数矩阵的最小多项式形式

在以矩阵 \mathbf{A} 为根的多项式中,最高次幂系数为1、阶数最小的多项式 $\Phi(s)$ 称为 \mathbf{A} 的最小多项式。

如果伴随矩阵 $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的各个元素有最大公因子 $d(s)$,即

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = d(s)\mathbf{P}(s) \quad (4-42)$$

则矩阵 \mathbf{A} 的最小特征多项式为

$$\Phi(s) = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{d(s)} \quad (4-43)$$

具有最小特征多项式的传递函数矩阵形式称为传递函数矩阵的最小多项式形式,即

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C} \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)} \mathbf{B} \quad (4-44)$$

$$\mathbf{W}_{ux}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)} \mathbf{B} \quad (4-45)$$

$$\mathbf{W}_{xy}(s) = \mathbf{C} \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)} \quad (4-46)$$

3. 状态能控的[s]域判据

如果线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是状态能控的,那么其输入到状态的传递函数矩阵的最小多项式形式

$$\mathbf{W}_{ux}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)} \mathbf{B}$$

没有零点极点相消因子。

4. 状态能观测的[s]域判据

如果线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 是状态能观测的,那么其状态到输出的传递函数矩阵的最小多项式形式

$$\mathbf{W}_{xy}(s) = \mathbf{C} \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)}$$

没有零点极点相消因子。

5. 状态能控能观测的[s]域判据

如果线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 是状态能控又能观测的,那么其传递函数矩阵的最小多项式形式

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C} \frac{\mathbf{P}(s)}{\Phi(s)} \mathbf{B}$$

没有零点极点相消因子。

必须指出:

(1) 对单输入单输出系统来说,以上状态能控和能观测的条件是充分必要条件,而且 \mathbf{A} 的特征多项式就是其最小特征多项式。

(2) 对多输入多输出系统来说,以上状态能控和能观测的条件是必要条件而不是充分必要条件。

【例 4.14】 某系统的系数矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -27 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 6 \quad 5]$$

试分析其能控性和能观测性。

解 系统的传递函数为

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{(s+5)(s+1)}{(s+6)(s+3)(s+1)}$$

因传递函数有一个零点极点相消因子 $s+1$, 故该系统不是状态能控又能观测的。

$u-x$ 之间的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}_{ux}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{(s+6)(s+3)(s+1)} \\ \frac{s}{(s+6)(s+3)(s+1)} \\ \frac{1}{(s+6)(s+3)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$x-y$ 之间的传递函数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{xy}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(s+5)(s+1)}{(s+6)(s+3)(s+1)} & \frac{(s+1)(6s+32)}{(s+6)(s+3)(s+1)} & \frac{(s+1)(5s+27)}{(s+6)(s+3)(s+1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\mathbf{W}_{ux}(s)$ 不含零点极点相消因子, 而 $\mathbf{W}_{xy}(s)$ 含有零点极点相消因子 $s+1$, 故该系统是状态能控但不能观测的。

4.5 对偶系统及对偶性原理

4.5.1 线性定常对偶系统

1. 对偶性

若两个线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ 与 $\sum(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ 的系数矩阵满足

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2^T \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_2^T \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_2^T$$

则称这两个系统互为对偶系统。

由对偶性定义知, 能控规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{c1}, \mathbf{b}_{c1})$ 系统与能观测规范 II 型 $\sum(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$ 系统互为对偶系统, 能控规范 II 型 $\sum(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{b}_{c2})$ 系统与能观测规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 系统互为对偶系统。

2. 对偶系统的特点

(1) 线性定常对偶系统的传递函数矩阵互为转置, 即

$$\mathbf{W}_1(s) = \mathbf{W}_2^T(s) \quad (4-47)$$

事实上

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1(s) &= \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2^T)^{-1}\mathbf{C}_2^T \\ &= [\mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2]^T = \mathbf{W}_2^T(s) \end{aligned}$$

(2) 因矩阵转置并不改变其特征值,故线性定常对偶系统的特征值相同。

(3) 对偶系统的状态转移矩阵互为转置,即

$$e^{A_1 t} = (e^{A_2 t})^T \quad (4-48)$$

证明

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= I + A_1 t + \frac{1}{2!} A_1^2 t^2 + \cdots = I + A_2^T t + \frac{1}{2!} (A_2^T)^2 t^2 + \cdots \\ &= (I + A_2 t + \frac{1}{2!} A_2^2 t^2 + \cdots)^T = (e^{A_2 t})^T \end{aligned}$$

证毕。

3. 对偶性原理

若两个系统 $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 与 $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 互为对偶系统,那么

(1) $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 的状态能控性等价于 $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 的状态能观测性。

(2) $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 的状态能观测性等价于 $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 的状态能控性。

证明

$$\begin{aligned} M_{c1} &= [B_1 \quad A_1 B_1 \quad A_1^2 B_1 \quad \cdots \quad A_1^{n-1} B_1] \\ &= [C_2^T \quad A_2^T C_2^T \quad (A_2^T)^2 C_2^T \quad \cdots \quad (A_2^T)^{n-1} C_2^T] \\ &= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ C_2 A_2^2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix}^T = M_{o2}^T \end{aligned}$$

显然

$$\text{rank}(M_{c1}) = \text{rank}(M_{o2})$$

因系统 $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 的能控性矩阵与系统 $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 的能观测性矩阵具有相同的秩,故当 $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 状态能控时, $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 状态能观测。

同理可得

$$\begin{aligned} M_{o1} &= M_{c2}^T \\ \text{rank}(M_{o1}) &= \text{rank}(M_{c2}) \end{aligned}$$

即当系统 $\sum (A_1, B_1, C_1)$ 状态能观测时,系统 $\sum (A_2, B_2, C_2)$ 状态能控。

4.5.2 线性时变对偶系统

1. 对偶性

线性时变系统 $\sum (A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 与 $\sum (A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 互为对偶的条件是

$$A_1(t) = -A_2^T(t) \quad B_1(t) = C_2^T(t) \quad C_1(t) = B_2^T(t)$$

2. 对偶系统的特点

$$\Phi_1(t, t_0) = \Phi_2^{-T}(t, t_0) \quad (4-49)$$

式中, $\Phi_1(t, t_0)$ 是 $\dot{x} = A_1(t)x$ 的状态转移矩阵, $\Phi_2(t, t_0)$ 是 $\dot{x} = A_2(t)x$ 的状态转移矩阵。

证明 由状态转移矩阵的可求导性得

$$\dot{\Phi}_1(t, t_0) = A_1(t) \Phi_1(t, t_0) \quad (4-50)$$

$$\dot{\Phi}_2(t, t_0) = A_2(t) \Phi_2(t, t_0) \quad (4-51)$$

根据对偶性定义,将上式中的 $A_2(t)$ 用 $-A_1^T(t)$ 代替,得

$$\dot{\Phi}_2(t, t_0) = -A_1^T(t) \Phi_2(t, t_0) \quad (4-52)$$

由状态转移矩阵的性质得

$$[\Phi_2(t, t_0) \Phi_2(t_0, t)]^T = [\Phi_2(t, t)]^T = \Phi_2^T(t_0, t) \Phi_2^T(t, t_0) = I \quad (4-53)$$

对上式两边关于时间 t 求导数,得

$$\dot{\Phi}_2^T(t_0, t) \Phi_2^T(t, t_0) + \Phi_2^T(t_0, t) \dot{\Phi}_2^T(t, t_0) = 0 \quad (4-54)$$

对上式右乘 $\Phi_2^T(t_0, t)$ 并移项,得

$$\dot{\Phi}_2^T(t_0, t) = -\Phi_2^T(t_0, t) \dot{\Phi}_2^T(t, t_0) \Phi_2^T(t_0, t) \quad (4-55)$$

将式(4-52)代入上式,得

$$\dot{\Phi}_2^T(t_0, t) = \Phi_2^T(t_0, t) \Phi_2^T(t, t_0) A_1(t) \Phi_2^T(t_0, t) = A_1(t) \Phi_2^T(t_0, t) \quad (4-56)$$

从而可得

$$\dot{\Phi}_2^{-T}(t, t_0) = A_1(t) \Phi_2^{-T}(t, t_0) \quad (4-57)$$

对比式(4-50)和式(4-57),立即得式(4-49)。

3. 对偶性原理

若两个系统 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 与 $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 互为对偶系统,那么:

(1) $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 的状态能控性等价于 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 的状态能观测性。

(2) $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 的状态能观测性等价于 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 的状态能控性。

证明 由能控性与能观测性的格拉姆矩阵的定义式及式(4-49),得

$$\begin{aligned} W_{c1}(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_0, t) B_1(t) B_1^T(t) \Phi_1^T(t_0, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi_2^T(t, t_0) C_2^T(t) C_2(t) \Phi_2(t, t_0) dt = W_{o2}(t_0, t_f) \end{aligned} \quad (4-58)$$

因 $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 的能控性矩阵 $W_{c1}(t_0, t_f)$ 与 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 的能观测性矩阵 $W_{o2}(t_0, t_f)$ 相等,故 $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 的能控性等价于 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 的能观测性。

同理可证 $\sum(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ 的能观测性等价于 $\sum(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ 的能控性。

4.6 线性定常系统能控与能观测结构分解

根据前面的讨论,如果

$$\text{rank}(M_c) = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = \mu < n$$

那么系统状态不完全能控。此时,有 μ 个状态变量能控制,其余不能控制。通过适当线性变换,

可把状态向量分解为能控的 \mathbf{x}_c 和不能控 $\mathbf{x}_{\bar{c}}$ 的两部分。与此同时,状态空间可分解为能控子空间 \mathbf{R}_c 和不能控子空间 $\mathbf{R}_{\bar{c}}$ 。

同样,如果

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \eta < n$$

那么系统状态不完全能观测。通过适当线性变换,可把状态向量分解为能观测的 \mathbf{x}_o 和不能观测的 $\mathbf{x}_{\bar{o}}$ 两部分。与此同时,状态空间可分解为能观测子空间 \mathbf{R}_o 和不能观测子空间 $\mathbf{R}_{\bar{o}}$ 。

如果一个系统状态既不完全能控也不完全能观测,那么通过适当线性变换,可把状态向量分解为既能控又能观测的 \mathbf{x}_{co} 、能控但不能观测的 $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ 、不能控但能观测的 $\mathbf{x}_{\bar{c}o}$ 和既不能控又不能观测的 $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ 4 部分。与此同时,状态空间可分解为既能控又能观测的 \mathbf{R}_{co} 、能控但不能观测的 $\mathbf{R}_{\bar{c}\bar{o}}$ 、不能控但能观测的 $\mathbf{R}_{\bar{c}o}$ 和既不能控又不能观测的 $\mathbf{R}_{\bar{c}\bar{o}}$ 4 个子空间。

以上便是系统结构规范分解要解决的问题。

4.6.1 能控与不能控结构分解及其 MATLAB 辅助计算

1. 分解方法

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

假设系统是状态不完全能控的,其能控性矩阵的秩为

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = \text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mu < n \quad (4-59)$$

那么存在非奇异矩阵 \mathbf{T}_c ,经线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c\mathbf{z}$ 后,可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (4-60)$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} \quad (4-61)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{AT}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (4-62)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}_c = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \quad (4-64)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ \mathbf{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{P}_n]$$

$\mathbf{P}_i (i = 1, 2, \cdots, \mu)$ 从 $\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 中选取前 μ 个线性无关列向量;

$\mathbf{P}_i (i = \mu + 1, \mu + 2, \cdots, n)$ 以 \mathbf{T}_c 非奇异为准任意选择。

经上述线性变换后,在 μ 维子空间 \mathbf{R}^μ , $\sum (\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ 是状态能控的,而在 $n - \mu$ 维子空间 $\mathbf{R}^{n-\mu}$, $\sum (\mathbf{A}_{\bar{c}}, 0)$ 是状态不能控的。

按能控性结构进行分解后, \mathbf{z} 变量空间 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^\mu \cup \mathbf{R}^{n-\mu}$ 的动态方程又可分解表示为

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\mathbf{z}_c \in \mathbf{R}^\mu) \quad (4-65)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\bar{c}} = \mathbf{A}_{\bar{c}} \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\mathbf{z}_{\bar{c}} \in \mathbf{R}^{n-\mu}) \quad (4-66)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_c + \mathbf{C}_2 \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (4-67)$$

必须指出,由于选取线性变换矩阵 \mathbf{T}_c 的非唯一性,能控与不能控结构分解的结果不是唯一的。

2. 实现能控与不能控结构分解的 MATLAB 命令

MATLAB 提供了实现能控与不能控结构规范分解的命令 ctrbf,其调用格式为:

$$[\mathbf{A}_-, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-, \mathbf{T}_c, \mathbf{R}_c] = \text{ctrbf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

其中, \mathbf{T}_c 为线性变换矩阵; \mathbf{A}_- 、 \mathbf{B}_- 和 \mathbf{C}_- 分别为经规范分解后的系数矩阵; \mathbf{R}_c 为 n 维数组,其元素的和等于能控子空间的维数。

规范分解前后各矩阵间的关系为

$$\mathbf{A}_- = \mathbf{T}_c \mathbf{A} \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\bar{c}} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_- = \mathbf{T}_c \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_- = \mathbf{C} \mathbf{T}_c^{-1}$$

与以上矩阵关系对应的线性变换为 $\mathbf{z} = \mathbf{T}_c \mathbf{x}$, 其中, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\bar{c}} \\ \mathbf{z}_c \end{bmatrix}$ 。可见, MATLAB 命令语句 ctrbf 的分解方法与上面的分解方法不一致。

【例 4.15】 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 2 \quad 5 \quad 0]$$

试分析状态能控性,若不能控,则进行结构分解,将状态向量分解为能控和不能控两部分。

解 (1) 能控性分析

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 54 \\ 3 & -9 & 27 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 25 & -74 \end{bmatrix}$$

因为 $\mu = \text{rank}(\mathbf{M}_c) = 3 < 4$, 故系统状态不完全能控。

(2) 结构规范分解

从 \mathbf{M}_c 中取线性无关前 3 列并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_c , 得

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & -9 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 25 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{19}{58} & -\frac{1}{29} & 0 & \frac{9}{58} \\ -\frac{10}{87} & -\frac{35}{261} & 0 & \frac{3}{29} \\ -\frac{13}{174} & -\frac{1}{261} & 0 & \frac{1}{58} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}$ 进行线性变换,可得 \mathbf{z} 变量空间的动态方程,即

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}u \\ y &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & \vdots & \frac{43}{58} \\ 1 & 0 & -3 & \vdots & \frac{100}{261} \\ & & & & \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & \frac{43}{522} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ \mathbf{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_4 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}_c = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] = [6 \quad -18 \quad 54 \vdots 5]\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{43}{58} \\ \frac{261}{100} \\ \frac{43}{522} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{\bar{c}} = -3 \\ \mathbf{b}_c &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = [6 \quad -18 \quad 54] \quad \mathbf{C}_2 = 5\end{aligned}$$

经上述线性变换后, 在 $\mu = 3$ 维子空间 \mathbf{R}^3 , $\sum(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)$ 是状态能控的, 亦即 $\mathbf{z}_c = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T$ 能控, 而在 $n - \mu = 1$ 维子空间 \mathbf{R} , $\sum(\mathbf{A}_{\bar{c}}, 0)$ 是状态不能控的, 亦即 $\mathbf{z}_{\bar{c}} = z_4$ 不能控。

4.6.2 能观测与不能观测结构分解及其 MATLAB 辅助计算

1. 分解方法

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

假设系统是状态不完全能观测的, 且

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \eta < n$$

那么存在非奇异矩阵 \mathbf{T}_o , 经线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_o\mathbf{z}$ 后, 可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (4-68)$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} \quad (4-69)$$

式中

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_o \\ \mathbf{z}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (4-70)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = [\mathbf{C}_o \quad 0] \quad (4-72)$$

其中

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_i (i = 1, 2, \dots, \eta) \text{ 从 } \mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \text{ 中选取前 } \eta \text{ 个线性无关行向量。}$$

$\mathbf{P}_i (i = \eta + 1, \eta + 2, \dots, n)$ 以 \mathbf{T}_o^{-1} 非奇异为准任意选择。

经上述线性变换后,在 η 维子空间 \mathbf{R}^η , $\sum (\mathbf{A}_o, \mathbf{C}_o)$ 是状态能观测的,而在 $n - \eta$ 维子空间 $\mathbf{R}^{n-\eta}$, $\sum (\mathbf{A}_{\bar{o}}, 0)$ 是状态不能观测的。

按能观测性结构进行分解后, \mathbf{z} 变量空间 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^\eta \cup \mathbf{R}^{n-\eta}$ 的动态方程又可分解表示为

$$\dot{\mathbf{z}}_o = \mathbf{A}_o \mathbf{z}_o + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (\mathbf{z}_o \in \mathbf{R}^\eta) \quad (4-73)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}} = \mathbf{A}_{\bar{o}} \mathbf{z}_{\bar{o}} + \mathbf{A}_{21} \mathbf{z}_o + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (\mathbf{z}_{\bar{o}} \in \mathbf{R}^{n-\eta}) \quad (4-74)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_o \mathbf{z}_o \quad (4-75)$$

必须指出,由于选取线性变换矩阵 \mathbf{T}_o 的非唯一性,能观测与不能观测结构分解的结果不是唯一的。

2. 实现能观测与不能观测结构分解的 MATLAB 命令

MATLAB 提供了实现能观测与不能观测结构规范分解的命令 obsvf,其调用格式为:

$$[\mathbf{A}_-, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-, \mathbf{T}_o, \mathbf{R}_o] = \text{obsvf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

其中, \mathbf{R}_o 为 n 维数组,其元素的和等于能观测子空间的维数,其他符号意义同前。

规范分解前后各矩阵间的关系为

$$\mathbf{A}_- = \mathbf{T}_o \mathbf{A} \mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\bar{o}} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_- = \mathbf{T}_o \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_- = \mathbf{C} \mathbf{T}_o^{-1} = [0 \quad \mathbf{C}_o]$$

与以上矩阵关系对应的线性变换为 $\mathbf{z} = \mathbf{T}_o \mathbf{x}$, 其中, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\bar{o}} \\ \mathbf{z}_o \end{bmatrix}$ 。可见, MATLAB 命令语句

obsvf 的分解方法与上面的分解方法不一致。

【例 4.16】 试分析例 4.15 系统的状态能观测性,若不能观测,则进行结构分解,将状态向量分解为能观测和不能观测两部分。

解 (1) 能观测性分析

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & 0 \\ 0 & 18 & 33 & 0 \\ 0 & -54 & -81 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\eta = \text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2 < 4$, 故系统状态不完全能观测。

(2) 结构规范分解

从 \mathbf{M}_o 中取线性无关前 2 行并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_o^{-1} , 得

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_o \mathbf{z}$ 进行线性变换, 可得 \mathbf{z} 变量空间的动态方程, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}u \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_o \\ \mathbf{z}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & -3 & 0 \\ \hline \frac{69}{4} & \frac{25}{4} & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 6 \\ -18 \\ \hline 1 \\ 5 \end{array} \right] \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_o &= [\mathbf{C}_o \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_o &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{69}{4} & \frac{25}{4} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{\bar{o}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_o &= [1 \quad 0] & \mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

经上述线性变换后,在 $\eta = 2$ 维子空间 \mathbf{R}_o^2 , $\sum (\mathbf{A}_o, \mathbf{C}_o)$ 是状态能观测的,亦即 $\mathbf{z}_o = [z_1 \ z_2]^\top$ 能观测,而在 $n - \eta = 2$ 维子空间 \mathbf{R}_o^2 , $\sum (\mathbf{A}_o, 0)$ 是状态不能观测的,亦即 $\mathbf{z}_o = [z_3 \ z_4]^\top$ 不能观测。

4.6.3 能控性与能观测性结构综合分解

对于既不完全能控也不完全能观测的系统,可分 3 步进行结构分解。

第 1 步:按能控性结构进行分解,将状态空间分解为能控和不能控两个子空间。

第 2 步:对能控子空间按能观测性结构进行分解。

第 3 步:对不能控子空间按能观测性进行结构分解。

当然,也可先按能观测性进行结构分解,再对能观测与不能观测两个子空间分别按能控性进行结构分解。

【例 4.17】 某线性定常连续系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= [3 \ 0 \ 1 \ 0] \end{aligned}$$

试分析系统的能控性和能观测性,若不能控和不能观测,则进行结构分解。

解 (1) 能控性和能观测性分析

系统能控性和能观测性矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & -10 & 44 & -184 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\mu = \text{rank}[\mathbf{M}_c] = 2 < 4$, $\eta = \text{rank}[\mathbf{M}_o] = 2 < 4$, 所以系统状态既不完全能控也不完全能观测。

(2) 能控与不能控结构分解

从 \mathbf{M}_c 中取线性无关前 2 列并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_c , 得

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}$ 进行线性变换, 可得 \mathbf{z} 变量状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c \mathbf{z} + \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} u = \begin{bmatrix} 0 & -8 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -6 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{T}_c \mathbf{z} = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 3] \mathbf{z}\end{aligned}$$

令

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = [1 \quad -2], \mathbf{C}_2 = [0 \quad 3], \mathbf{z}_c = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \text{ 可得}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c u + \mathbf{A}_{12} \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\text{E1})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\bar{c}} = \mathbf{A}_{\bar{c}} \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\text{E2})$$

$$y = \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_c + \mathbf{C}_2 \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\text{E3})$$

(3) 将能控子空间分解为能观测与不能观测两子空间

在能控子空间, 能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_{o1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

因 $\eta_1 = \text{rank}[\mathbf{M}_{o1}] = 1 < 2$, 故只有一个状态变量能观测。

从 \mathbf{M}_{o1} 中取第 1 行并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_{o1}^{-1} , 得

$$\mathbf{T}_{o1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{w}_{o1} = [w_1 \quad w_2]^T$, 对式(E1) ~ 式(E3) 按 $\mathbf{z}_c = \mathbf{T}_{o1} \mathbf{w}_{o1}$ 进行线性变换, 可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}_{o1} &= \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T}_{o1} \mathbf{w}_{o1} + \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{b}_c u + \mathbf{T}_{o1}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{z}_{\bar{c}} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{z}_{\bar{c}}\end{aligned} \quad (\text{E4})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\bar{c}} = \mathbf{A}_{\bar{c}} \mathbf{z}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\text{E5})$$

$$y = \mathbf{C}_1 \mathbf{T}_{o1} \mathbf{w}_{o1} + \mathbf{C}_2 \mathbf{z}_{\bar{c}} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 3] \mathbf{z}_{\bar{c}} \quad (\text{E6})$$

由式(E4) 和式(E6) 可知, w_1 能观测, w_2 不能观测。由于这是在能控子空间通过能观测性结构分解得出的, 所以, w_1 既能控又能观测, w_2 能控但不能观测。

(4) 将不能控子空间分解为能观测与不能观测两子空间

在不能控子空间, 能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_{o2} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

因 $\eta_2 = \text{rank}[\mathbf{M}_{o2}] = 1 < 2$, 故只有一个状态变量能观测。

从 \mathbf{M}_{o2} 中取第 1 行并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_{o2}^{-1} , 得

$$\mathbf{T}_{o2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{w}_{o2} = [\omega_3 \quad \omega_4]^T$, 对式(E4) ~ 式(E6) 按 $\mathbf{z}_{\bar{c}} = \mathbf{T}_{o2} \mathbf{w}_{o2}$ 进行线性变换, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_{o1} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{o2} \mathbf{w}_{o2} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E7})$$

$$\dot{\mathbf{w}}_{o2} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{A}_{\bar{c}} \mathbf{T}_{o2} \mathbf{w}_{o2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (\text{E8})$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 3] \mathbf{T}_{o2} \mathbf{w}_{o2} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (\text{E9})$$

从式(E8) 和式(E9) 容易看出, 状态变量 ω_3 是能观测的, 而 ω_4 是不能观测的。由于这是在不能控子空间通过能观测性结构分解得出的, 所以, ω_3 是不能控但能观测的, 而 ω_4 是既不能控又不能观测的。

将式(E7) ~ 式(E9) 状态变量组合起来, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_{o1} \\ \dot{\mathbf{w}}_{o2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -4 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -3 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{w} \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_{co} \\ \omega_{\bar{co}} \\ \omega_{\bar{co}} \\ \omega_{\bar{co}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$, $\omega_{co} = \omega_1$ 既能控又能观测, $\omega_{\bar{co}} = \omega_2$ 能控但不能观测, $\omega_{\bar{co}} = \omega_3$ 不能控但能观测, $\omega_{\bar{co}} = \omega_4$ 既不能控也不能观测。

习 题 4

4-1 某线性时变连续系统的系统矩阵、控制矩阵及观测矩阵分别为

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}(t) = [1 \quad 0 \quad e^{-5t}]$$

- (1) 试分析系统的能控性和能观测性。
- (2) 求与该系统互为对偶的系统的动态方程。

4-2 某线性定常连续系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x}$$

- (1) 系统状态是否能控?若能控,将其化为能控规范型。
- (2) 系统状态是否能观测?若能观测,将其化为能观测规范型。
- (3) 求与该系统互为对偶的系统的动态方程,并验证对偶两系统的能控性与能观测性之间的关系、传递函数之间的关系以及状态转移矩阵之间的关系。

4-3 假设离散系统的动态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

试分析系统的能控性和能观测性。

4-4 某线性定常连续系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad y = [3 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

试分析系统的能控性和能观测性,若不能控和不能观测,则进行结构分解。

第5章 线性定常控制系统的综合

内容提示:本章论证控制系统的综合方法,包括极点配置、系统解耦、系统镇定、状态重构、带状态重构器的状态反馈系统设计及其 MATLAB 编程与计算等。

控制系统的功能是控制输出量,使之保持不变或按预定的方式变化。为保证这一功能的实现,首先它必须是稳定的,其次应具有较快的响应速度和较高的稳态响应精度。

对于给定的控制系统,欲知道其动态品质和稳态性能,就必须进行量化分析。系统分析是控制理论研究的一项重要内容。

经过系统分析,若发现系统的某些性能不满足指标要求,就需要通过调整结构参数或以某种方式加入一些新元件来改变系统的参数或结构,以改善系统性能,使之达到所需要的指标要求。这便是系统综合。系统综合是控制理论研究的另一项重要内容。

前面几章论证了系统分析方法,本章论证系统综合方法。

不同的系统,有不同的追求目标。追求目标不同,系统综合也不同。常见的系统综合问题有以下几种。

(1) 极点配置控制问题

系统的极点分布不仅决定着系统的稳定性,还决定着动态品质。若给定所需要的极点(称为期望极点),要求综合后的系统极点完全重合于期望极点,这样的系统综合问题称为极点配置问题。

(2) 解耦控制问题

多输入多输出系统,其输入量与输出量之间往往存在耦合关系,即一个输入量同时与多个输出量(或一个输出量同时与多个输入量)存在关系。如果要求每一个输入量只与一个输出量之间存在给定的关系而与其他输出量无关,这样的系统综合问题称为解耦问题。

(3) 镇定控制问题

以实现系统稳定为目标的系统综合问题称为镇定问题。

(4) 状态重构控制问题

状态反馈是改变系统结构以实现系统综合目标的基本方式,状态反馈的前提是状态变量可在物理上引出来。然而,如第1章所述,在许多情况下,状态变量往往是纯数学量,没有物理意义,无法量测;有些状态变量虽然是物理量,但受结构或其他限制,也难以引出信号,实现反馈。解决这一困难的途径之一就是通过系统综合重新构造系统状态。这样的系统综合问题称为状态重构问题。

(5) 最优控制问题

在满足给定的约束条件和边界条件的情况下、以评价指标最小化为准则寻求最优控制的系统综合问题称为最优控制问题。

最优控制理论自成体系,内容繁多,留待下一章论证,本章论证前4种系统综合方法。

5.1 反馈控制系统的基本概念

反馈控制系统有状态反馈和输出反馈两种结构形式。

5.1.1 状态反馈控制系统

将状态信号引出来、经某种变换作用后传输到输入端,从而改变控制作用和系统特性的反馈称为状态反馈。典型的状态反馈系统的结构如图 5.1 所示。

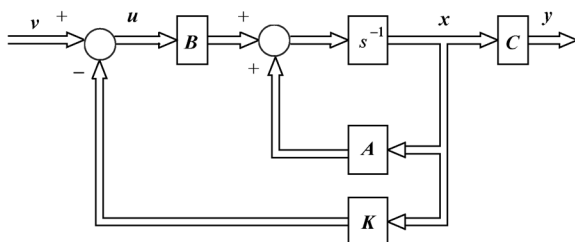


图 5.1 状态反馈控制系统结构图

1. 状态反馈前后系统的数学模型比较

参见图 5.1,引入状态反馈前,系统状态方程和输出方程及传递函数矩阵分别为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5-1)$$

$$y = Cx \quad (5-2)$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (5-3)$$

引入状态反馈后,系统状态方程和输出方程及传递函数矩阵分别为

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv \quad (5-4)$$

$$y = Cx \quad (5-5)$$

$$W(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B \quad (5-6)$$

式中:

v 是输入向量,在物理上就是状态反馈前的输入向量 u ,只不过为区分反馈前后的输入量而引入了一个新符号。

K 为状态反馈增益矩阵。对于单输入系统, K 是 $1 \times n$ 矩阵,即

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

对于 p 输入系统, K 是 $p \times n$ 矩阵,即

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & k_{p2} & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix}$$

对比式(5-1)~式(5-3)和式(5-4)~式(5-6),显而易见,经状态反馈后,系统的输入矩阵和输出矩阵没有改变,而系统矩阵由反馈前的 A 变为 $A - BK$ 。

系统矩阵改变了,系统的特征值也就改变了,从而系统的特性也就改变了。欲得到所需要的特征值和系统特性,只须选取恰当的状态反馈增益矩阵 K 。

另外从图 5.1 容易看出,经状态反馈后,系统的实际控制量是原输入量和状态变量的线性组合,即

$$u = v - Kx$$

显然,状态反馈增益矩阵 K 不同,实际控制量 u 就不同。从这一点看,状态反馈的本质是改变了控制作用。欲得到特定的控制作用,只须选取恰当的矩阵 K 。

2. 状态反馈对系统特性的影响

(1) 状态反馈不改变系统能控性

考虑到状态能控系统可化为能控规范型,为使问题简单化,假设原控制系统为能控规范 I 型,其系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵及其对应的传递函数分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

经状态反馈后,系统的输入矩阵和输出矩阵没有改变,而系统矩阵由反馈前的 \mathbf{A} 变为

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

显然,状态反馈系统 $\sum(\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{b})$ 仍为能控规范 I 型。这表明状态反馈不改变系统的能控性。

(2) 状态反馈可改变系统极点,但不改变系统零点

对照状态反馈前后系统的系数矩阵,容易写出状态反馈系统的传递函数,即

$$W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_2)s + a_0 + k_1} \quad (5-8)$$

由上式可以看出,经状态反馈后,传递函数的分母多项式变化了,而分子多项式没有变化。这表明状态反馈可改变系统极点,但不改变系统零点。

(3) 状态反馈有可能改变系统能观测性

在以下两种情况下,状态反馈可改变系统能观测性。

① 状态反馈系统的极点等于系统零点

因状态反馈可改变系统极点而不改变系统零点,如果状态反馈后反馈系统的极点等于系统零点,那么传递函数就会含有零点极点相消因子,这将导致系统不能观测。

② 如图 5.2 所示包含顺馈作用的系统,经状态反馈后,输出方程变为

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}$$

如果状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 的选取使 $\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{C}$,则输出量退化为 $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{v}$,与状态不发生任何关系,于是系统状态就不能观测了。

(4) 状态反馈可改变系统稳定性

系统极点决定着系统的稳定性。状态反馈既然可改变系统极点,自然也就可改变系统的稳定性。

5.1.2 输出反馈控制系统

输出反馈有两种结构形式,一是从输出端到状态导数的反馈形式,二是从输出端到输入端的反馈形式。

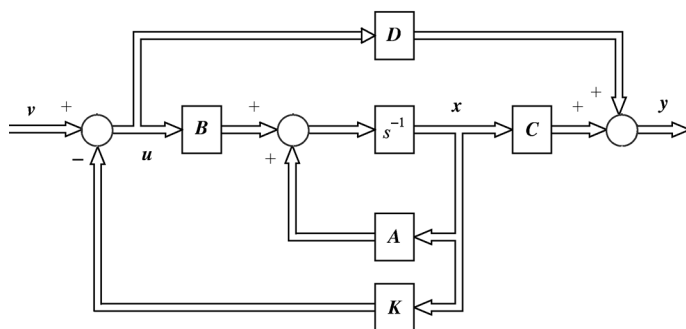


图 5.2 含顺馈作用的状态反馈控制系统结构图

1. 从输出端到状态导数的反馈

这种反馈控制是将输出信号引出来、经某种变换作用后传输到状态导数处,从而改变系统特性的一种反馈,如图 5.3 所示。

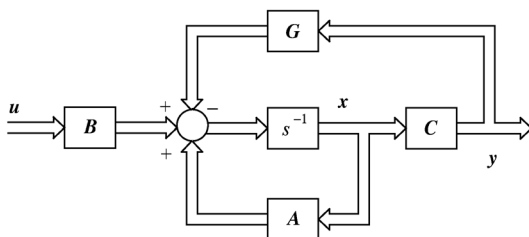


图 5.3 从输出端到状态导数的反馈控制系统结构图

由图 5.3,这种反馈系统的状态方程和输出方程及传递函数矩阵分别为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (5-9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5-10)$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC})^{-1}\mathbf{B} \quad (5-11)$$

式中, \mathbf{G} 为输出反馈增益矩阵。

对于单输出系统,输出反馈增益矩阵 \mathbf{G} 为 $n \times 1$ 矩阵,对于 q 输出系统, \mathbf{G} 为 $n \times q$ 矩阵,即

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad (\text{单输出}) \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1q} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nq} \end{bmatrix} \quad (q \text{ 输出})$$

根据式(5-9)和式(5-10),经输出反馈后,系统的输入矩阵和输出矩阵没有改变,而系统矩阵由反馈前的 \mathbf{A} 变为 $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ 。欲得到期望的特征值和控制特性,只须选取恰当的输出反馈增益矩阵 \mathbf{G} 。

2. 从输出端到输入端的反馈

这种反馈是将输出信号引出来、经某种变换作用后传输到输入端,从而改变系统特性的一种反馈,如图 5.4 所示。

由图 5.4,这种反馈系统的状态方程和输出方程及传递函数矩阵分别为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BGC})\mathbf{x} + \mathbf{B}v \quad (5-12)$$

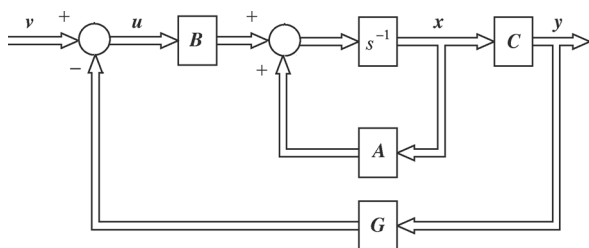


图 5.4 从输出端到输入端的反馈控制系统结构图

$$y = Cx \quad (5-13)$$

$$W(s) = C(sI - A + BGC)^{-1}B \quad (5-14)$$

式中, G 为 $p \times q$ 维的输出反馈增益矩阵, 其中 p 和 q 分别是输入和输出向量的维数。

根据式(5-12)和式(5-13), 经输出反馈后, 系统的输入矩阵和输出矩阵没有改变, 而系统矩阵由反馈前的 A 变为 $A - BGC$ 。

另外, 从图 5.4 容易看出, 经输出反馈后, 系统的实际控制量是原输入量和状态变量的线性组合, 即

$$u = v - GCx$$

可见, 与状态反馈类似, 从输出端到输入端反馈的本质是改变了控制作用。

将式(5-4)与式(5-12)进行比较, 可以看出, 输出反馈中的 GC 与状态反馈中的 K 相当。但由于输出向量的维数(C 矩阵的行数)比系统阶数小得多, 即 $q < n$, 所以可供 G 选择的自由度远比 K 选择的自由度小, 因而输出反馈只相当于部分状态反馈。只有当 $C = I$ 时, 输出反馈才与状态反馈相当。因此, 与状态反馈相比, 这种输出反馈的适应性差, 一般须附加动态补偿器。

5.2 以实现期望极点为目标的系统综合

极点配置问题追求的目标是把系统极点配置到期望极点。

鉴于传递函数矩阵的极点等于系统矩阵的特征值, 在后面的论述中对这两个术语不加区分。

5.2.1 单输入状态反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算

【定理】 单输入系统的动态方程为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

通过状态反馈可任意配置系统极点的充分必要条件是: 原控制系统 $\sum(A, b)$ 状态能控。

这个定理不用数学证明, 只须用逻辑推理就可判定其正确性。

(1) 如果原控制系统 $\sum(A, b)$ 状态能控, 则必可通过线性变换将其化为能控规范 I 型。

(2) 对于能控规范 I 型系统, 根据式(5-7)和式(5-8), 状态反馈系统的特征值方程为

$$\det(sI - A + bK) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_2)s + a_0 + k_1 = 0$$

这是一个实常数一元 n 次方程, 方程的根完全取决于各次幂的系数。而各次幂的系数又取决于状态反馈增益矩阵 K 。欲得到所需要的特征值, 只须选取恰当的矩阵 K 。

1. 状态反馈系统的期望极点

期望极点以满足给定的性能指标要求为准确定, 确定期望极点的基本原则如下:

(1) n 阶系统须配置 n 个期望极点。

(2) 为便于物理上实现,状态反馈增益矩阵 K 应为实常数矩阵。为此,期望极点可以是实数也可以是复数,但若为复数,必须共轭成对配置。

(3) 配置期望极点时必须考虑系统零点。特别在配置闭环主导期望极点时,不能将它配置在零点附近,以免其作用被零点抵消。

(4) 期望极点不能与原控制系统极点差别过大,以避免反馈矩阵 K 的元素值过大、引起信号瞬态畸变和增大噪声。

2. 状态反馈增益矩阵 K 的确定方法

若系统的期望极点为 $s_i^* (i=1, 2, \dots, n)$, 则与之对应的期望极点方程为

$$D^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*) = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + a_1^* s + a_0^* = 0 \quad (5-15)$$

式中, $a_i^* (i=0, 1, \dots, n-1)$ 与 $s_i^* (i=1, 2, \dots, n)$ 有关。

状态反馈系统的极点方程为

$$D(s) = \det(sI - A + bK) = s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0 = 0 \quad (5-16)$$

式中, $\bar{a}_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 与 K 有关。

欲将状态反馈系统的极点配置在期望极点上,只须使式(5-15)和式(5-16)的特征多项式相等。而这只须使两者同次幂系数相等。

确定状态反馈增益矩阵 K 的步骤如下:

(1) 根据系统期望极点计算期望特征多项式 $D^*(s)$;

(2) 计算状态反馈系统的特征多项式 $D(s)$;

(3) 由 $D(s) = D^*(s)$ 确定 K 。

状态反馈增益矩阵 K 还可运用 MATLAB 来计算。MATLAB 提供了计算 K 的命令语句 place 和 acker,其调用格式为:

$$K = \text{place}(A, b, P) \quad \text{或} \quad K = \text{acker}(A, b, P)$$

其中, P 为状态反馈系统的期望极点矩阵,即 $P = [s_1^* \quad s_2^* \quad \dots \quad s_n^*]$ 。

acker 命令只适用于单输入问题,place 命令既适用于单输入问题,也适用于多输入问题。

【例 5.1】 假设系统的状态空间模型为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

试设计一个状态反馈系统,将系统的极点配置为 $s_{1,2}^* = -2 \pm j4$, $s_3^* = -10$ 。

解 (1) 状态能控性检验

系统能控性矩阵为

$$M_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

因 $\det(M_c) = -1$, $\text{rank}(M_c) = 3$, 所以系统状态能控,可任意配置极点。

(2) 按极点配置要求确定状态反馈增益矩阵

系统的期望特征多项式为

$$D^*(s) = (s+2+j4)(s+2-j4)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

假设状态反馈增益矩阵为 $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$, 则状态反馈系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bK}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (6+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1+k_1$$

令

$$D^*(s) = D(s)$$

易得

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [199 \quad 55 \quad 8]$$

状态反馈系统的结构如图 5.5 所示。

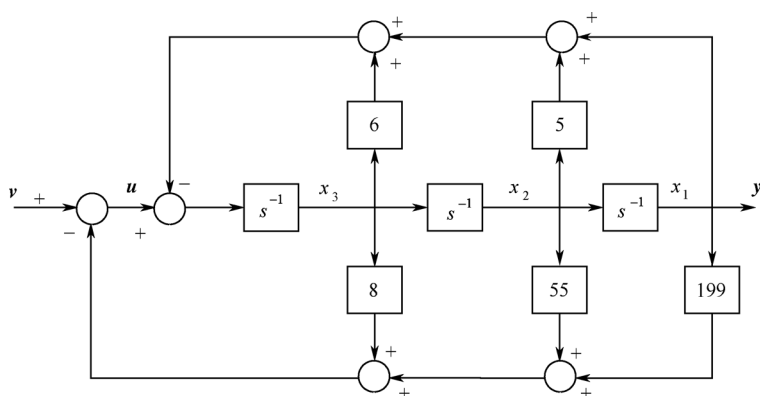


图 5.5 状态反馈控制系统结构图

(3) MATLAB 辅助计算

运用 MATLAB 计算状态反馈增益矩阵的人机交互过程及数据如表 5.1 所示。

表 5.1 确定状态反馈矩阵的 MATLAB 辅助计算

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -5 -6];b=[0;0;1];
>> rankMc=rank(ctrb(A,b))

rankMc =

    3

>> P=[-2+j*4,-2-j*4,-10];
>> K=acker(A,b,P)

K =

fx 199    55     8

```

5.2.2 多输入状态反馈控制系统的极点配置方法

对于 p 输入系统,输入矩阵 \mathbf{B} 是 $n \times p$ 矩阵, \mathbf{K} 是 $p \times n$ 矩阵,即

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & k_{p2} & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix}$$

单输入状态反馈系统的 \mathbf{K} 只有 n 个元素,而 p 输入状态反馈系统的 \mathbf{K} 有 $p \times n$ 个元素。毫无疑问,其计算要复杂得多。下面介绍一种把求 p 输入反馈矩阵 \mathbf{K} 问题化为求单输入反馈矩阵 \mathbf{K} 问题的方法。

p 输入状态反馈系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$$

把 \mathbf{K} 化为 $p \times 1$ 和 $1 \times n$ 两矩阵的乘积,即

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\rho} \bar{\mathbf{K}}$$

其中, $\boldsymbol{\rho}$ 是 $p \times 1$ 矩阵, $\bar{\mathbf{K}}$ 是 $1 \times n$ 矩阵,即

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_p]^T \quad \bar{\mathbf{K}} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

于是可得

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\rho}\bar{\mathbf{K}})$$

令 $\mathbf{b} = \mathbf{B}\boldsymbol{\rho}$, 显然 \mathbf{b} 是 $n \times 1$ 维的,可得

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{K}})$$

上式与单输入系统特征多项式(5-16)完全相同。这表明当取 $\mathbf{K} = \boldsymbol{\rho}\bar{\mathbf{K}}$ 、 $\mathbf{b} = \mathbf{B}\boldsymbol{\rho}$ 时,多输入系统求 \mathbf{K} 问题可化为单输入系统求 $\bar{\mathbf{K}}$ 问题。

考虑到通过状态反馈可任意配置极点的充分必要条件是 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 能控, $\mathbf{b} = \mathbf{B}\boldsymbol{\rho}$ 中的 $\boldsymbol{\rho}$ 可按系统能控条件任意选定,而 $\bar{\mathbf{K}}$ 按单输入系统极点配置方法确定。一旦 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}$ 确定,立即可得 $\mathbf{K} = \boldsymbol{\rho}\bar{\mathbf{K}}$ 。

5.2.3 输出反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算

1. 从输出端到状态导数的反馈控制系统极点配置方法

【定理】 从输出端到状态导数的反馈可任意配置极点的充分必要条件是:原控制系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 状态能观测。

由式(5-9)可知,从输出端到状态导数的反馈控制系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) \quad (5-17)$$

输出反馈增益矩阵 \mathbf{G} 的计算方法与前述状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 的计算方法完全类似,即:

- (1) 根据系统期望极点计算期望特征多项式 $D^*(s)$;
- (2) 计算输出反馈系统的特征多项式 $D(s)$;
- (3) 由 $D(s) = D^*(s)$ 确定 \mathbf{G} 。

输出反馈增益矩阵 \mathbf{G} 还可运用 MATLAB 来计算,其命令语句仍为 `acker` 和 `place`。由对偶性原理可得:

$$\mathbf{G} = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{P})' \quad \text{或} \quad \mathbf{G} = \text{acker}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{P})'$$

其中, \mathbf{P} 为输出反馈系统的期望极点矩阵。

【例 5.2】 试为例 5.1 系统设计一个输出反馈闭环系统, 使输出反馈系统具有状态反馈系统的功能。

解 (1) 状态能观测性检验

系统能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 3$, 系统状态能观测, 故可任意配置极点。

(2) 按极点配置要求确定输出反馈增益矩阵

系统的期望特征多项式为

$$D^*(s) = (s+2+j4)(s+2-j4)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

假设输出反馈增益矩阵为 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$, 则输出反馈系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} D(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) = \begin{vmatrix} s+g_1 & -1 & 0 \\ g_2 & s & -1 \\ 1+g_3 & 5 & s+6 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (6+g_1)s^2 + (5+g_2+6g_1)s + 5g_1+6g_2+g_3+1 \end{aligned}$$

令

$$D^*(s) = D(s)$$

易得

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 117 \end{bmatrix}$$

输出反馈系统的结构如图 5.6 所示。

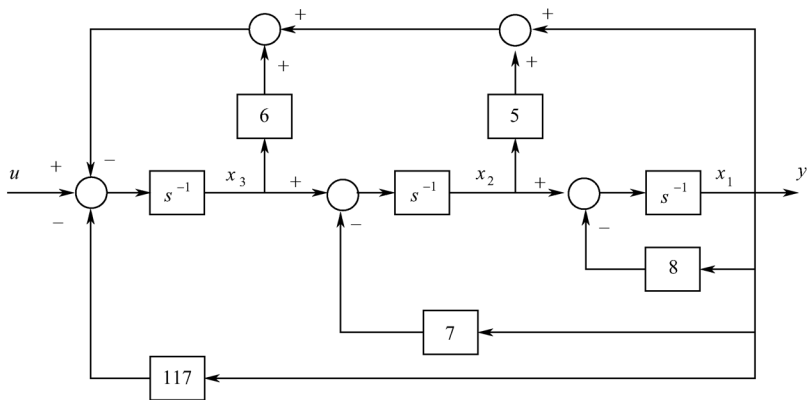
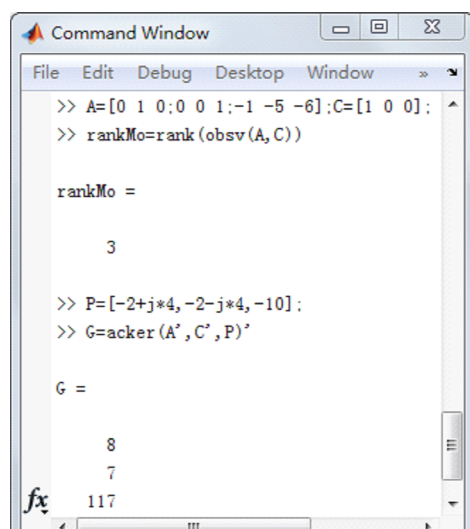


图 5.6 输出反馈控制系统结构图

(3) MATLAB 辅助计算

运用 MATLAB 计算输出反馈增益矩阵的人机交互过程及数据如表 5.2 所示。

表 5.2 确定输出反馈矩阵的 MATLAB 辅助计算



```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window >>
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -5 -6];C=[1 0 0];
>> rankMo=rank(observ(A,C))

rankMo =

     3

>> P=[-2+j*4,-2-j*4,-10];
>> G=acker(A',C',P)'

G =

     8
     7
    117
  
```

2. 从输出端到输入端的反馈控制系统的极点配置

由式(5-12)可知,从输出端到输入端的反馈控制系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(sI - A + BGC)$$

在这种情况下,无论怎样选择输出反馈增益矩阵 G ,都不能通过纯线性反馈实现极点的任意配置。欲任意配置极点,除了原控制系统 $\sum(A, C)$ 状态能观测以外,还须附加一个动态补偿器。

5.3 以实现系统镇定为目标的系统综合

【定义】 若通过信号反馈能使控制系统稳定,则称该系统是可镇定的。

系统镇定综合就是把不稳定系统改造成稳定系统。

因线性系统全局渐近稳定的充分必要条件是极点都在复平面的左半部,所以欲实现系统镇定只须使系统所有极点为负数或者实部为负。显然,稳定系统就是镇定系统,对于不稳定系统,只要通过某种反馈把所有正数极点和实部为正的极点转移到复平面的左半部即可。

【定理 1】 通过状态反馈使线性定常系统镇定的充分必要条件是:原控制系统不能控子空间是渐近稳定的。

该定理的正确性通过逻辑推理就可断定。

前面已经指出,只要系统状态能控,就可通过状态反馈任意配置极点。因此,状态能控系统必定是可镇定系统。对于状态不完全能控系统,可以通过线性变换将状态空间分解成能控和不能控两个子空间。因线性变换不改变系统的特征值,所以当不能控子空间渐近稳定时,实部为正的极点一定分布在状态能控子空间。于是,通过状态反馈定可将其转移到复平面的左半部,实现系统镇定。

状态不能控系统通过状态反馈可任意配置的极点数为

$$\mu_c = \text{rank}(M_c) = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

【定理 2】 通过输出端到状态导数的反馈使线性定常系统镇定的充分必要条件是:原控制系统不能观测子空间是渐近稳定的。

前面已经指出,只要系统状态能观测,就可通过输出端至状态导数的输出反馈任意配置极点。因此,状态能观测系统必定是可镇定系统。对于状态不完全能观测系统,可以通过线性变换将状态空间分解成能观测和不能观测两个子空间。因线性变换不改变系统的特征值,所以当不能观测子空间渐近稳定时,实部为正的极点一定分布在状态能观测子空间。于是,通过输出反馈定可将其转移到复平面的左半部,实现系统镇定。

状态不能观测系统通过输出反馈可任意配置的极点数为

$$\mu_o = \text{rank}(\mathbf{M}_o) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

根据以上分析,能控或能观测系统必可镇定,但可镇定系统不一定能控和能观测。

【例 5.3】 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \mathbf{Cx} = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x} + u$$

试问能否通过状态反馈使系统镇定? 若通过状态反馈能使系统镇定,试设计一个状态反馈镇定系统。

解 (1) 稳定性分析

系统矩阵的特征值显然有正实数 $s_1 = 1, s_2 = 2$ 和负实数 $s_3 = -1$, 故系统不稳定。

(2) 镇定分析

系统的能控性矩阵为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 2 < 3$, 故系统状态不完全能控。

① 将状态空间分解为能控与不能控两个子空间

令

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}$ 进行线性变换, 可得 \mathbf{z} 变量空间的状态方程, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}u = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{AT}_c\mathbf{z} + \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b}u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (\text{E1})$$

$$y = \mathbf{CT}_c\mathbf{z} + u \quad (\text{E2})$$

式中, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{AT}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_c = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ 。

将式(E1)分解开来,可得

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c u = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{能控子空间}) \quad (\text{E3})$$

$$\dot{z}_3 = -z_3 \quad (\text{不能控子空间}) \quad (\text{E4})$$

② 子空间稳定性分析

位于能控子空间的特征值为 $s_1 = 1, s_2 = 2$; 位于不能控子空间的特征值为 $s_3 = -1$ 。因两个正实数特征值都位于能控子空间,故通过状态反馈可把它们变为负数或实部为负的共轭复数,从而实现系统稳定。因此,通过状态反馈能使该系统镇定。

(3) 状态反馈镇定系统设计

① 按镇定要求确定状态反馈增益矩阵

仿照前面状态反馈极点配置方法,对 2 维能控子空间引入状态反馈,可得状态反馈子系统,其增益矩阵为 $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$,与之对应的反馈子系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{K}) \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c v \quad (\text{E5})$$

式中, \mathbf{K} 按 $\mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{K}$ 的特征值要求确定。

假设 $\mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{K}$ 的期望特征值为 $-2 \pm j4$,则状态反馈子系统的期望特征多项式为

$$D^*(s) = (s + 2 + j4)(s + 2 - j4) = s^2 + 4s + 20$$

状态反馈子系统的特征多项式为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c \mathbf{K}) = \begin{vmatrix} s + k_1 & 2 + k_2 \\ -1 & s - 3 \end{vmatrix} = s^2 + (k_1 - 3)s - 3k_1 + 2 + k_2$$

令

$$D^*(s) = D(s)$$

易得

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] = [7 \quad 39]$$

于是,经状态反馈后, \mathbf{z} 变量状态方程为

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{K}) \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c v$$

$$\dot{z}_3 = -z_3$$

将以上两式合并,可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_c \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{K} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} v - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E6})$$

② 状态反馈镇定系统模型

因 \mathbf{z} 变量方程是由 \mathbf{x} 变量方程经线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}$ 而得到的,所以在完成 \mathbf{z} 变量空间的镇定计算后还须进行还原变换,将其还原到 \mathbf{x} 变量空间。这只须按 $\mathbf{z} = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x}$ 进行线性变换即可。因式(E6)右边的前两项就是式(E1)的右边项,所以这两项还原后就是原系统状态方程的右边项。于是可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_c \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{T}_c \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} u - \mathbf{T}_c \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -25 & 16 & 0 \\ -50 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{E7})$$

上式即为状态反馈镇定系统的状态方程,右边的最后一项就是状态反馈项。容易验证,状态反馈镇定系统的特征值为 $s_{1,2} = -2 \pm j4$ 和 $s_3 = -1$ 。

经还原变换后, \mathbf{z} 变量输出方程(E2)也被还原到原输出方程。

状态反馈镇定系统结构如图 5.7(b)所示。

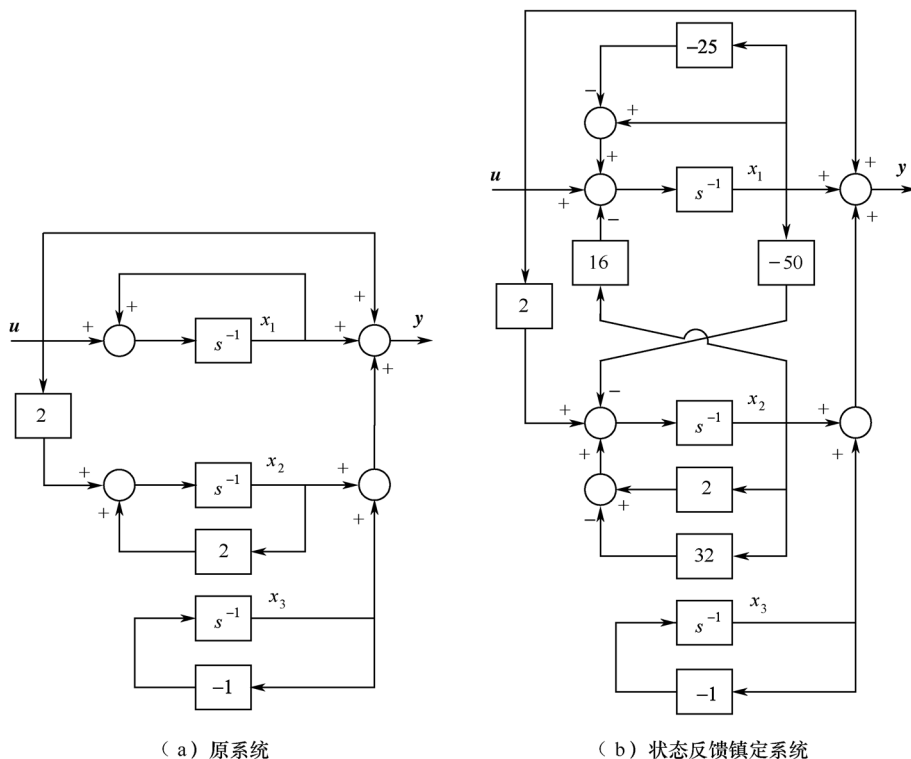


图 5.7 系统结构图

5.4 以实现解耦控制为目标的系统综合

解耦综合追求的目标是把多输入多输出系统的各个输入量和输出量分解成一一对应关系,使系统的传递函数矩阵成为对角线矩阵。

5.4.1 补偿器解耦

补偿器解耦是通过引入补偿器和输出反馈来实现的,其结构如图 5.8 所示。其中, $\mathbf{W}_o(s)$ 为原系统的传递函数矩阵, $\mathbf{G}_c(s)$ 为补偿器的传递函数矩阵。

下面论证补偿器的确定方法。

假定原控制系统的输入输出关系为

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{W}_o(s) \mathbf{U}(s)$$

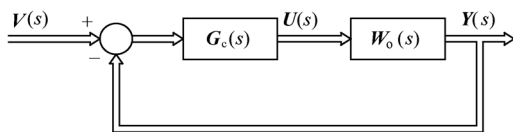


图 5.8 补偿器解耦控制系统结构图

其中, $\mathbf{W}_o(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \cdots & w_{1p}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \cdots & w_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1}(s) & w_{p2}(s) & \cdots & w_{pp}(s) \end{bmatrix}^{\circ}$

根据图 5.8, 引入补偿器与输出反馈后, 系统的传递函数矩阵变为

$$\mathbf{W}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)]^{-1}\mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)$$

等式两边左乘 $[\mathbf{I} + \mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)]$, 可得

$$[\mathbf{I} + \mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)]\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)$$

合并同类项并提取公因子, 可得

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_o(s)\mathbf{G}_c(s)[\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)]$$

于是, 补偿器的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{W}_o^{-1}(s)\mathbf{W}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)]^{-1} \quad (5-18)$$

【例 5.4】某系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试设计一个带补偿器的解耦系统, 使解耦系统的极点为 0。

解 原系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}_o(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{s^2+7s+11}{(s+3)^3} \\ \frac{1}{s+3} & -\frac{1}{(s+3)^2} \end{bmatrix}$$

根据题意, 解耦系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

补偿器的传递函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_c(s) &= \mathbf{W}_o^{-1}(s)\mathbf{W}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+3 & s^2+7s+11 \\ (s+3)^2 & -(s+3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解耦系统结构如图 5.9 所示。

5.4.2 状态反馈解耦

状态反馈解耦是通过引入状态反馈和输入变换来实现的, 其结构如图 5.10 所示。其中 \mathbf{K} 为 $p \times n$ 维状态反馈增益矩阵, \mathbf{F} 为 $p \times p$ 维输入变换矩阵, 它们都是实常数矩阵, \mathbf{v} 为 $p \times 1$ 维输入向量。

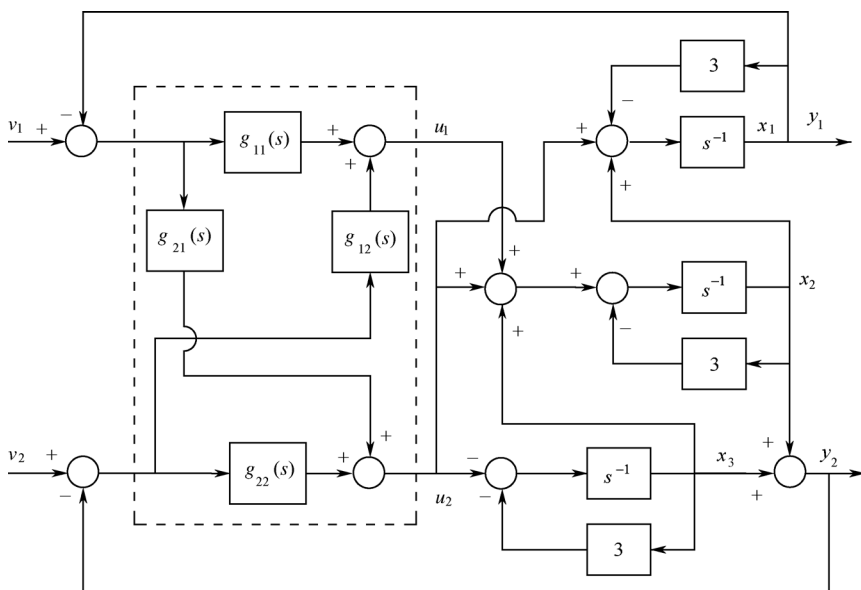


图 5.9 补偿器解耦控制系统结构图

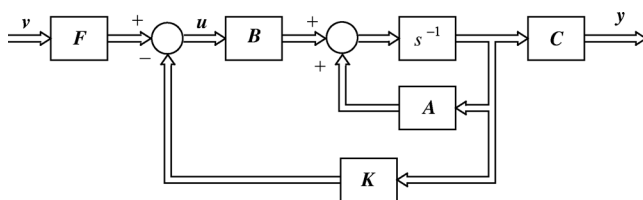


图 5.10 状态反馈解耦系统结构图

假定原系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}_o(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \cdots & w_{1p}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \cdots & w_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1}(s) & w_{p2}(s) & \cdots & w_{pp}(s) \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

引入状态反馈和输入变换后,系统的状态方程和传递函数矩阵变为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BF}\mathbf{v} \quad (5-20)$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BF} \quad (5-21)$$

为使 $\mathbf{W}(s)$ 成为对角线矩阵,必须选取恰当的矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 。下面不加证明地直接给出这两个矩阵的计算方法。

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}^{-1} (p \times p \text{ 维}) \quad (5-22)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{L} \quad (p \times n \text{ 维}) \quad (5-23)$$

式中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_p \mathbf{A}^{d_p+1} \end{bmatrix} \quad (p \times n \text{ 维}) \quad (5-24)$$

$$E = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_p A^{d_p} B \end{bmatrix} \quad (p \times p \text{ 维}) \quad (5-25)$$

$C_i (i=1, 2, \dots, p)$ 为输出矩阵 C 的第 i 行;

$$d_i = \begin{cases} \min(k) \mid C_i A^k B \neq 0 (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ n-1 \mid C_i A^k B = 0 (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (5-26)$$

d_i 等于使 $C_i A^k B$ 不等于 0 的最小 k 值 ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$)。

当 $C_i A^k B = 0 (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 时, $d_i = n-1$ 。

【定理】 采用状态反馈能使原系统 $\sum (A, B, C)$ 解耦的充分必要条件是矩阵 E 非奇异。

5.4.3 实现状态反馈解耦控制计算的 MATLAB 编程与计算

运用 MATLAB 实现状态反馈解耦控制计算的一个通用程序列于表 5.3。该程序定义了一个名为 `uncouple_design` 的函数,其形参量有系统矩阵 A 、输入矩阵 B 、输出矩阵 C 。该程序新应用的 MATLAB 命令语句只有 `C(i, :)`,其意义是取 C 矩阵的第 i 行。

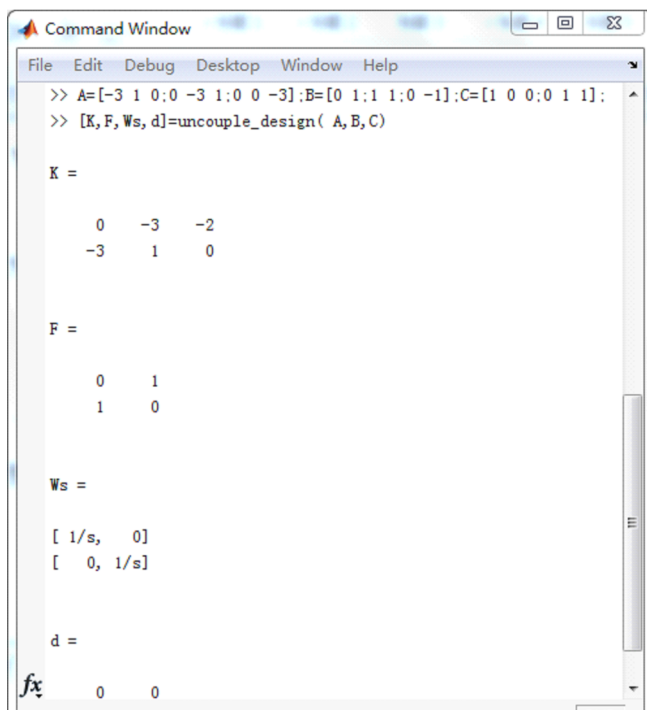
表 5.3 实现状态反馈解耦控制计算的 MATLAB 通用程序

```

1 function [K,F,Ws,d]=uncouple_design( A,B,C)
2 % 系统矩阵A;控制矩阵B;输出矩阵C
3 % 状态反馈K;输入变换阵F;解耦后传函矩阵Ws
4 syms s
5 [n,p]=size(B);d=[];E=[];L=[];
6 for i=1:p
7     CiAkB=0;
8     for k=0:n-1
9         if(rank(C(i,:)*A^k*B)~=0)
10             d(i)=k; %当C(i,:)*A^k*B不等于0时,di=k
11             CiAkB=1;
12             break;
13         end
14     end
15     if(CiAkB==0)
16         d(i)=n-1; %当C(i,:)*A^k*B=0时,di=n-1
17     end
18     L=[L;C(i,:)*A^(d(i)+1)]; %计算L矩阵
19     E=[E;C(i,:)*A^d(i)*B]; %计算E矩阵
20 end
21 if(det(E)==0)
22     error('无法通过状态反馈使系统解耦!')
23 else
24     F=inv(E); %输入变换矩阵
25     K=F*L; %状态反馈矩阵
26     Ws=simplify(C*inv(s*eye(n)-A+B*K)*B*F); %解耦后传函阵
27 end
28 end
  
```

在命令窗口 Command Window 以实参调用该程序, MATLAB 迅即完成计算并输出状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 、输入变换矩阵 \mathbf{F} 、传递函数矩阵 \mathbf{W}_s 和由式(5-26)中的数 d_1, d_2, \dots, d_p 构成的矩阵 \mathbf{d} 。具体人机交互计算过程和数据如表 5.4 所示。

表 5.4 实现解耦运算的 MATLAB 人机交互过程及数据



```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[-3 1 0;0 -3 1;0 0 -3];B=[0 1;1 1;0 -1];C=[1 0 0;0 1 1];
>> [K,F,Ws,d]=uncouple_design( A,B,C)

K =

    0    -3    -2
   -3     1     0

F =

    0     1
    1     0

Ws =

    [ 1/s,    0]
    [    0, 1/s]

d =

fx    0    0

```

【例 5.5】 试为例 5.4 系统设计一个状态反馈解耦系统。

解 因 $\mathbf{C}_1 \mathbf{A}^0 \mathbf{B} = [0 \ 1] \neq 0$, 故 $d_1 = 0$

因 $\mathbf{C}_2 \mathbf{A}^0 \mathbf{B} = [1 \ 0] \neq 0$, 故 $d_2 = 0$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

引入状态反馈和输入变换后, 系统的传递函数矩阵变为

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{BF} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

状态反馈解耦控制系统结构如图 5.11 所示。

在 MATLAB 命令窗口 Command Window 输入系统的各系数矩阵后调用表 5.3 程序进行计算, 所得计算结果如表 5.4 所示。

MATLAB 计算结果与上面计算结果互为对证。

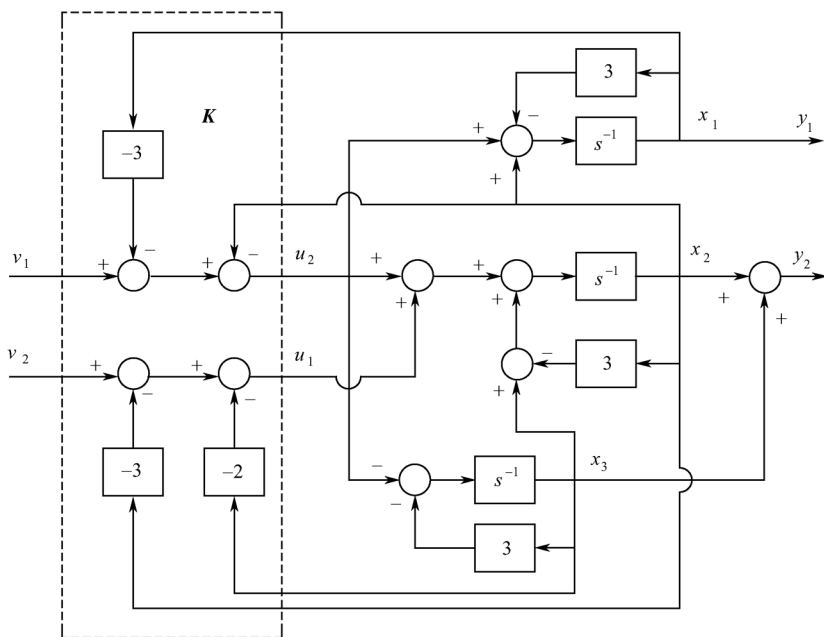


图 5.11 状态反馈解耦控制系统结构图

5.5 状态重构控制系统

状态重构是为解决无法引出状态信号问题而提出的。状态重构是通过引入状态重构器（也称状态观测器）而实现的。状态重构器有全维和降维两种形式。

5.5.1 全维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计

全维状态重构器是这样一种重构器，就物理模型而言，无论是结构还是类型，重构器与原控制系统完全不同，可按相似原理用机械系统重构电气系统或用电气系统重构机械系统，可用一个简单微小型物理系统重构一个复杂大型物理系统。就数学模型而言，重构器与原控制系统一致。

设计状态重构器的关键是使重构器状态趋近于真实状态。显然并不是把两个具有相同数学模型的系统简单结合到一起就能实现状态重构，还必须采用输出反馈方式把它们以恰当方式耦合在一起。图 5.12 所示为带全维状态重构器的系统结构图。

1. 状态重构器的数学模型

由图 5.12，全维状态重构器系统的数学模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (5-27)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5-28)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}u \quad (5-29a)$$

或

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (5-29b)$$

式中， $\tilde{\mathbf{x}}$ 为重构状态， \mathbf{G} 为输出误差反馈矩阵。

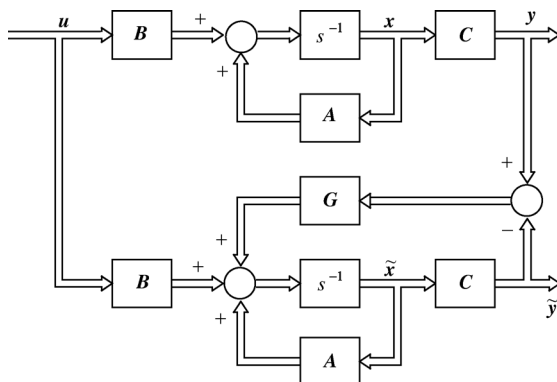


图 5.12 全维状态重构器系统结构图

很显然,全维状态重构器系统是 $2n$ 维系统。

2. 输出误差反馈矩阵 G

输出误差反馈矩阵 G 应使重构状态按工程需要的速度趋近真实状态,即应使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = x$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = \lim_{t \rightarrow \infty} (x - \tilde{x}) = 0 \quad (5-30)$$

式中, $x_e = x - \tilde{x}$ 为重构状态误差。

式(5-27)减去式(5-29b),得

$$\dot{x}_e = \dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (A - GC)(x - \tilde{x}) = (A - GC)x_e \quad (5-31)$$

这是一个齐次微分方程。该方程的解为

$$x_e = e^{(A-GC)t} x_e(0)$$

式中, $x_e(0)$ 为初始重构状态误差。

从上式可以看出,欲实现 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e \rightarrow 0$, 只须使矩阵 $A - GC$ 的特征值(称为状态重构器的极点)为负数或实部为负,而不论初始重构状态误差 $x_e(0)$ 有多大。

为使各重构状态变量趋于真实状态变量所需的时间大致相当, $A - GC$ 的特征值一般选为重特征值。

【定理】 若线性定常系统 $\sum(A, C)$ 状态能观测,则只要适当选择输出误差反馈矩阵 G , 使状态重构器的极点为负数或实部为负,就能使重构状态误差趋于 0。

确定输出误差反馈矩阵 G 的步骤如下:

- (1) 确定状态重构器的期望极点并计算其期望特征多项式 $D^*(s)$;
- (2) 计算 $A - GC$ 的特征多项式 $D(s)$;
- (3) 由 $D(s) = D^*(s)$ 确定 G 。

输出误差反馈矩阵 G 还可运用 MATLAB 来计算,其命令语句还是 acker 和 place,调用格式是:

$$G = \text{acker}(A', C', L)'$$

其中, L 为状态重构器的期望极点(亦即 $A - GC$ 的期望特征值)矩阵。

【例 5.6】 假设控制系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

试设计一个全维状态重构器系统,使状态重构器的极点为 $s = -10$,并求重构状态随真实状态变化的规律。

解 (1)能观测性分析

系统能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 3$, 系统状态能观测。

(2) 输出误差反馈矩阵 \mathbf{G}

假设输出误差反馈矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} D(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} s + g_1 & -1 & 0 \\ g_2 & s & -1 \\ 1 + g_3 & 5 & s + 6 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (6 + g_1)s^2 + (5 + g_2 + 6g_1)s + 5g_1 + 6g_2 + g_3 + 1 \end{aligned}$$

根据题目要求,状态重构器的极点为 $s = -10$,故 $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$ 的期望特征多项式为

$$D^*(s) = (s + 10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000$$

令

$$D(s) = D^*(s)$$

可得

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 151 \\ -27 \end{bmatrix}$$

实现状态重构器设计的 MATLAB 人机交互过程及数据如表 5.5 所示。带全维状态重构器的系统结构如图 5.13 所示。

(3) 重构状态变化规律

重构状态误差为

$$\mathbf{x}_e = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})t} \mathbf{x}_e(0) = \begin{bmatrix} 1 - 14t + \frac{45}{2}t^2 & t - 2t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ -151t + 315t^2 & 1 + 10t - 28t^2 & t + 7t^2 \\ 26t + \frac{495}{2}t^2 & -5t - 22t^2 & 1 + 4t + \frac{11}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{-10t} \mathbf{x}_e(0)$$

表 5.5 求解重构器问题的 MATLAB 辅助计算

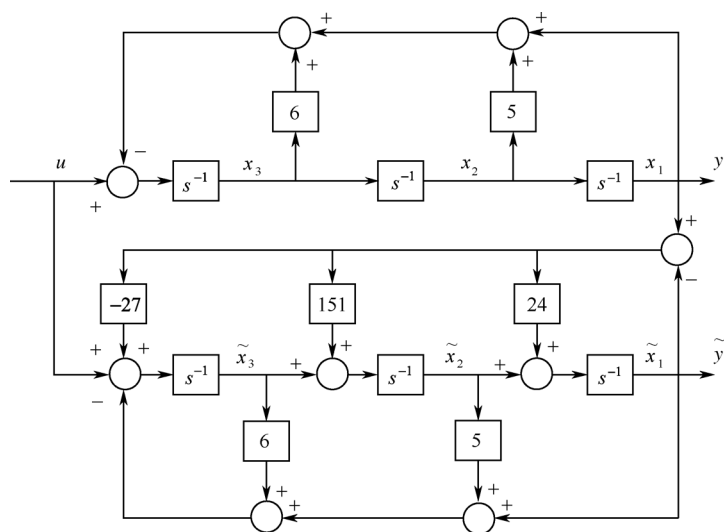
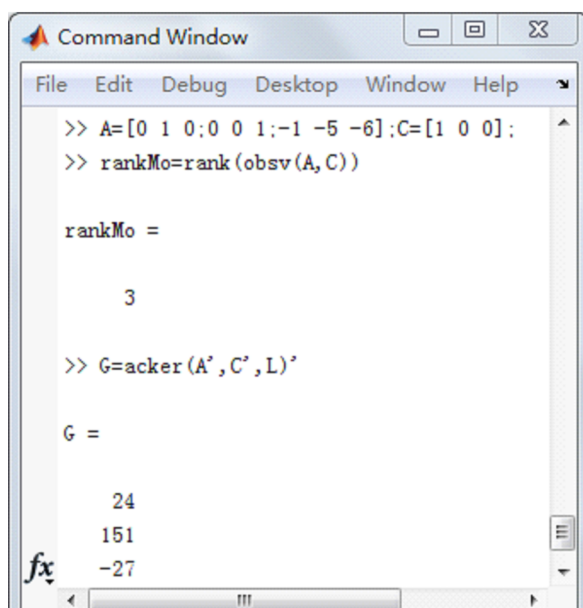


图 5.13 带全维状态重构器的系统结构图

可见,重构状态误差以 $t^m e^{-10t}$ (m 为实常数)线性组合的方式变化。

于是,重构状态随系统状态变化的规律为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 1 - 14t + \frac{45}{2}t^2 & t - 2t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ -151t + 315t^2 & 1 + 10t - 28t^2 & t + 7t^2 \\ 26t + \frac{495}{2}t^2 & -5t - 22t^2 & 1 + 4t + \frac{11}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{-10t} \mathbf{x}_e(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$$

5.5.2 带全维状态重构器的状态反馈系统及其 MATLAB 辅助设计

状态重构解决了无法引出状态信号的问题,引入状态重构器的目的,自然是为了实现状态反馈。

根据前面的分析,只要重构器极点为负数或实部为负,当时间足够大时,重构状态 \tilde{x} 必将逼近真实状态 x ,即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x} = x$ 。于是就可用重构状态 \tilde{x} 作为反馈信号实现状态反馈,达到系统综合目的。图 5.14 为带全维状态重构器的状态反馈系统的结构图。

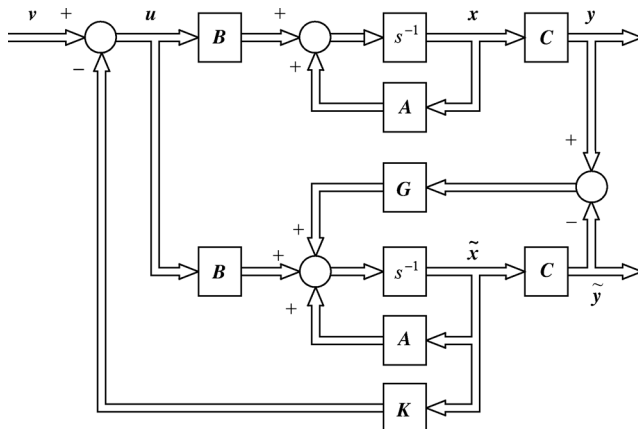


图 5.14 带全维状态重构器的状态反馈系统

1. 带全维状态重构器的状态反馈系统的设计原则

由图 5.14,系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} + Bv \quad (5-32a)$$

$$\dot{\tilde{x}} = GCx + (A - BK - GC)\tilde{x} + Bv \quad (5-32b)$$

将以上两式组合起来,得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ GC & A - BK - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \quad (5-32c)$$

系统的输出方程为

$$y = Cx \quad (5-33)$$

取 $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ 进行正交线性变换,即令

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = Tz$$

可得

$$\dot{z} = T^{-1} \begin{bmatrix} A & -BK \\ GC & A - BK - GC \end{bmatrix} Tz + T^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (5-34)$$

$$y = CTz = [C \quad 0]z \quad (5-35)$$

由于线性变换不改变系统的特征值,所以系统的特征值方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= \det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + GC \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - A + BK) \det(sI - A + GC) = 0 \end{aligned} \quad (5-36)$$

于是可得

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0 \quad (5-37)$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) = 0 \quad (5-38)$$

式(5-37)是状态反馈系统的特征值方程,式(5-38)是全维状态重构器的特征值方程,二者之间没有任何关联。这个性质称为特征值的分离性质。据此,对于能控能观测控制系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, 带全维状态重构器的状态反馈系统的设计原则是:

- (1) 按照重构器的特征值指标要求确定输出误差反馈矩阵 \mathbf{G} ;
- (2) 按照状态反馈的指标要求确定状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 。

2. 带全维状态重构器的状态反馈系统的能控性

根据式(5-34),带全维状态重构器的状态反馈系统的能控性矩阵为

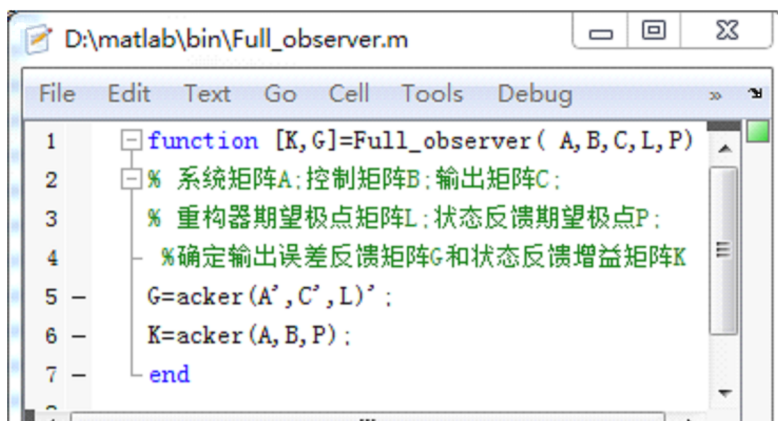
$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2\mathbf{B} & \cdots & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

显然,该矩阵的秩是 n 。这表明有 n 个状态变量不能控。事实上,不能控的状态正是重构状态 $\tilde{\mathbf{x}}$ 。

3. 实现带全维状态重构器的状态反馈系统设计计算的 MATLAB 编程与计算

运用 MATLAB 实现带全维状态重构器的状态反馈系统设计计算的一个通用程序列于表 5.6。该程序定义了一个名为 Full_observer 的函数,其形参量有系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 和状态反馈系统期望极点矩阵 \mathbf{P} 、状态重构器期望极点矩阵 \mathbf{L} 。只要在命令窗口 Command Window 以实参调用该函数,即可确定状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 和输出误差反馈矩阵 \mathbf{G} 。

表 5.6 实现带全维重构器的状态反馈设计计算的 MATLAB 通用程序



【例 5.7】 假设控制系统与例 5.1 及例 5.6 系统相同,试设计一个带全维状态重构器的状态反馈系统,使状态反馈系统在稳定工作时的极点为 $s_{1,2}^* = -2 \pm j4$, $s_3^* = -10$,重构状态误差以 $t^m e^{-10t}$ (m 为实常数)的线性组合方式变化。

解 本例系统与例 5.1 及例 5.6 系统相同,状态反馈极点配置要求与例 5.1 的配置要求相同,重构器设计要求与例 5.6 的设计要求相同(只不过表述方法不同)。因此,根据带全维状态重构器的状态反馈系统的分离设计原则,状态重构器按例 5.6 设计,极点配置按例 5.1 设计,系统的结构图是前两例结构图 5.5 和图 5.13 的组合,如图 5.15 所示。实现该设计计算的 MATLAB 人机交互过程与数据如表 5.7 所示。

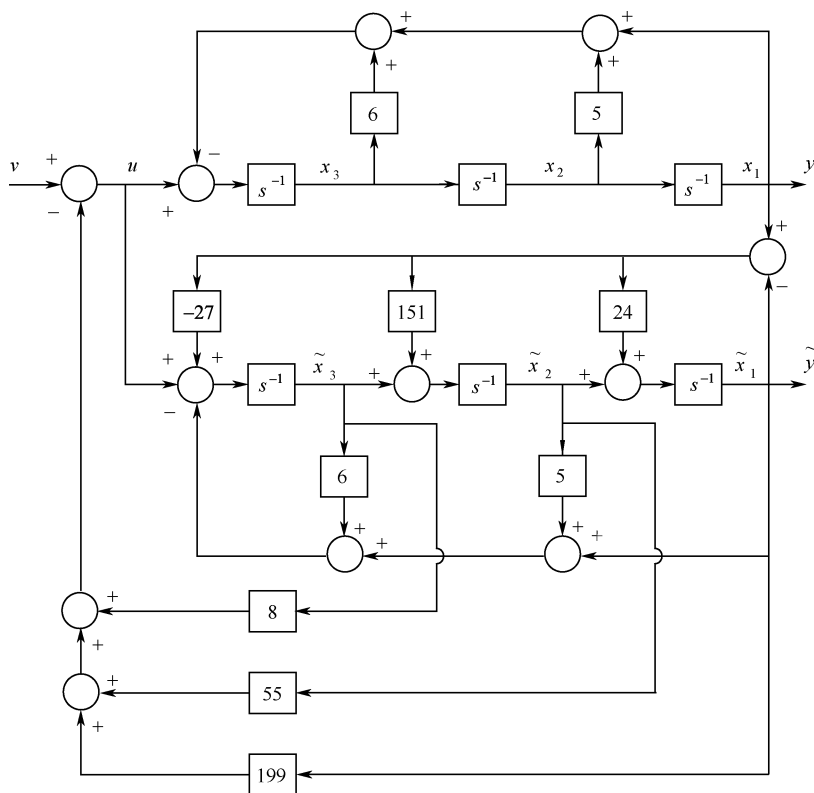


图 5.15 带全维状态重构器的状态反馈系统

表 5.7 带全维重构器状态反馈系统的 MATLAB 设计计算

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -5 -6];b=[0;0;1];C=[1 0 0];
>> P=[-2+i*4,-2-i*4,-10];L=[-10,-10,-10];
>> [K,G]=Full_observer(A,b,C,L,P)

K =

    199    55     8

G =

    24
   151
   -27
  
```

5.5.3 降维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计

全维状态重构器需要 n 个积分器,结构复杂,经济性不好。有没有办法简化呢?事实上,大多数系统的输出量本身就是状态变量,有些系统的输出量虽可能不等于状态变量,但状态是可观测的,因此,完全可以利用输出量构造状态变量,从而降低重构器的维数。 q 输出系统,仅用输出量就可构造 q 个状态变量,从而可减少 q 个积分器。降维状态重构器的意义正在于此。

下面从全维状态重构器入手,演绎降维状态重构器的设计方法。

1. 降维状态重构器设计方法

假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5-40a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5-40b)$$

为使问题简单化,假定用 q 个输出量构造后 q 个状态变量。为此,对上式引入如下坐标变换

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (5-41)$$

式中, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}$ 是 q 维向量, \mathbf{z}_1 是 $n-q$ 维向量, 矩阵 \mathbf{F} 以 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 非奇异为原则任意选取。

经线性变换后,在 \mathbf{z} 变量空间,系统的状态方程和输出方程分别为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5-42)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \quad (5-43)$$

下面研究 \mathbf{z} 变量空间的状态重构。由于 $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}$ 已经取定,所以实际上需要重构的只有 \mathbf{z}_1 。假定式(5-42)的展开式为

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5-44)$$

将上式分解,得

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (5-45)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (5-46)$$

将 $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}$ 代入上式,得

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (5-47)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (5-48)$$

令

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{y} - \mathbf{B}_2\mathbf{u}$$

那么式(5-47)和式(5-48)可化为

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{u}} \quad (5-49)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{z}_1 \quad (5-50)$$

以上两式是 $n-q$ 维子系统模型,其状态重构器结构如图 5.16 所示,其重构状态方程和重构状态误差方程分别为

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21})\tilde{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{G}\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (5-51)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{1e} = \dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21})(\mathbf{z}_1 - \tilde{\mathbf{z}}_1) = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21})\mathbf{z}_{1e} \quad (5-52)$$

式中, $\tilde{\mathbf{z}}_1$ 是 \mathbf{z}_1 的重构状态, \mathbf{G} 为 $(n-q) \times q$ 维的输出误差反馈矩阵。

欲使重构状态误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_{1e} = 0$, 只须使 $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21}$ 的特征值(称为降维状态重构器的极点)为负数或实部为负。以此为据,可确定矩阵 \mathbf{G} 。

再将上面定义的 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}$ 和 $\bar{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{y} - \mathbf{B}_2\mathbf{u}$ 代入式(5-51),可得

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21})\tilde{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{G}(\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{y} - \mathbf{B}_2\mathbf{u}) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (5-53a)$$

经移项得

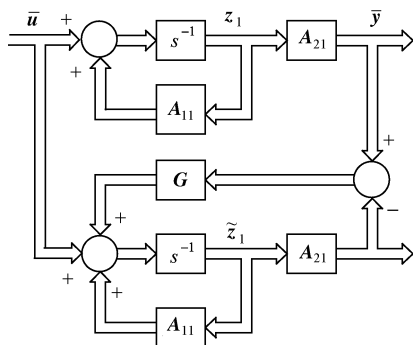


图 5.16 $n-q$ 维子系统状态重构器结构图

$$\dot{\tilde{z}}_1 - G \dot{y} = (A_{11} - GA_{21}) \tilde{z}_1 + G(-A_{22}y - B_2u) + A_{12}y + B_1u \quad (5-53b)$$

为避免 y 求导后信号发生畸变,有必要消除 y 导数项。为此再引入新的状态向量 w 并如下进行变换

$$w = \tilde{z}_1 - Gy \quad (5-54)$$

于是,式(5-53b)可化为

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (A_{11} - GA_{21})(w + Gy) + G(-A_{22}y - B_2u) + A_{12}y + B_1u \\ &= (A_{11} - GA_{21})w + [(A_{11} - GA_{21})G + A_{12} - GA_{22}]y + (B_1 - GB_2)u \end{aligned} \quad (5-55a)$$

为简化公式书写,令

$$\begin{aligned} A_w &= A_{11} - GA_{21} \\ A_y &= (A_{11} - GA_{21})G + A_{12} - GA_{22} \\ B_u &= B_1 - GB_2 \end{aligned}$$

可得

$$\dot{w} = A_w w + A_y y + B_u u \quad (5-55b)$$

从上式容易看出,当反馈矩阵 G 以 $A_{11} - GA_{21}$ 的特征值为负数或实部为负确定后, w 可由输出量和输入量构造。一旦确定了 w, z_1 的重构状态立即可定,即

$$\tilde{z}_1 = w + Gy$$

又因 $z_2 = y$, 所以 z 的重构状态为

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + Gy \\ y \end{bmatrix} \quad (5-56)$$

\tilde{z} 确定后,根据式(5-40), x 的重构状态应为

$$\tilde{x} = T^{-1} \tilde{z} = T^{-1} \begin{bmatrix} w + Gy \\ y \end{bmatrix} \quad (5-57)$$

不难看出,将式(5-55)和式(5-57)联合起来,即可实现状态重构。同时从上式还可以看出, x 的后 q 个重构状态变量是由输出构造的,只有其余 $n-q$ 个是需要独立构造的。这完全达到了设计降维重构器的目的。显然,输出量越多,需要独立重构的状态就越少,因而重构器的结构就越简单,经济性越好。

2. 实现带降维状态重构器的状态反馈系统设计计算的 MATLAB 编程与计算

运用 MATLAB 实现带降维状态重构器的状态反馈系统设计计算的一个通用程序列于

表 5.8。该程序定义了一个名为 mini_observer 的函数,其形参量有系数矩阵 A 、 B 、 C 和坐标变换矩阵 T 、降维状态重构器期望极点矩阵 L (即 $A_{11} - GA_{21}$ 的期望特征值) 和状态反馈系统期望极点矩阵 P 。只要在命令窗口 Command Window 以实参调用该函数,即可确定降维状态重构器计算式(5-55)中的 3 个系数矩阵和状态反馈增益矩阵 K 、输出误差反馈矩阵 G 。

表 5.8 实现降维状态重构器系统设计计算的 MATLAB 通用程序

```

D:\matlab\bin\mini_observer.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window »
1 function [Aw,Ay,Bu,G,K]=mini_observer( A,B,C,I,L,P)
2 % 降维状态重构器设计
3 % 系统矩阵A;控制矩阵B;输出矩阵C;线性变换矩阵I;
4 % 重构器期望极点矩阵L;状态反馈期望极点P;
5 n=size(A,1);q=size(C,1);
6 %z变量状态空间系数矩阵
7 A_=I*A*inv(I);
8 B_=I*B;
9 A11=A_(1:n-q,1:n-q);
10 A12=A_(1:n-q,n-q+1:n);
11 A21=A_(n-q+1:n,1:n-q);
12 A22=A_(n-q+1:n,n-q+1:n);
13 B1=B_(1:n-q);
14 B2=B_(n-q+1:n);
15 %确定输出误差反馈矩阵G和状态反馈增益矩阵K
16 G=acker(A11',A21',L)';
17 K=acker(A,B,P);
18 %计算系数
19 Aw=A11-G*A21;
20 Ay=(A11-G*A21)*G+A12-G*A22;
21 Bu=B1-G*B2;
22 end

```

【例 5.8】 试为例 5.7 系统设计一个带降维状态重构器的状态反馈系统,使其功能与例 5.7 系统功能相同。

解 (1)能控能观测性分析

系统是能控又能观测的,这已在前面例 5.1 和例 5.6 得到验证。

(2) 确定线性变换矩阵

$$\text{因 } C=[1 \ 0 \ 0], \text{ 故按非奇异原则取 } T=\begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E1})$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E2})$$

(3) 确定 z 变量空间系数矩阵

$$\bar{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E3})$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E5})$$

其中, $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{22} = 0$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = 0$ 。

(4) 确定输出误差反馈矩阵 \mathbf{G}

因为题目要求重构状态误差以 $t^m e^{-10t}$ (m 为实常数) 的线性组合方式变化, 所以 $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21}$ 的期望特征值为 $s_{1,2}^* = -10$ 。假设 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}^T$, 则 $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21}$ 的特征多项式和期望特征多项式分别为

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{G}\mathbf{A}_{21}) = s^2 + (6 + g_2)s + 5 + g_1 + 6g_2$$

$$D^*(s) = (s - s_1^*)(s - s_2^*) = (s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

令 $D(s) = D^*(s)$, 可得

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(5) 确定 \mathbf{w} 变量空间状态方程

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -6 & -16 \\ 1 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_y = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{21})\mathbf{G} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{G}\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -291 \\ -185 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_u = \mathbf{b}_1 - \mathbf{G}b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_w \mathbf{w} + \mathbf{A}_y \mathbf{y} + \mathbf{B}_u u = \begin{bmatrix} -6 & -16 \\ 1 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -291 \\ -185 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{E6})$$

(6) 确定重构状态

\mathbf{x} 的重构状态为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w} + \mathbf{G}\mathbf{y} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 + 11y \\ w_2 + 14y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ w_2 + 14y \\ w_1 + 11y \end{bmatrix} \quad (\text{E7})$$

根据式(E6)和式(E7)即可确定带降维状态重构器的状态反馈系统, 其结构如图 5.17 所示。

把本例带降维状态重构器的状态反馈系统结构图 5.17 和前例带全维状态重构器的状态反馈系统结构图 5.15 进行比较, 可以看出, 与全维状态重构器反馈系统相比, 降维状态重构器反馈系统的积分器减少了一个。

实现上述设计计算的 MATLAB 人机交互过程及数据如表 5.9 所示, 其中 mini_observer 就是程序表 5.8 中的函数。

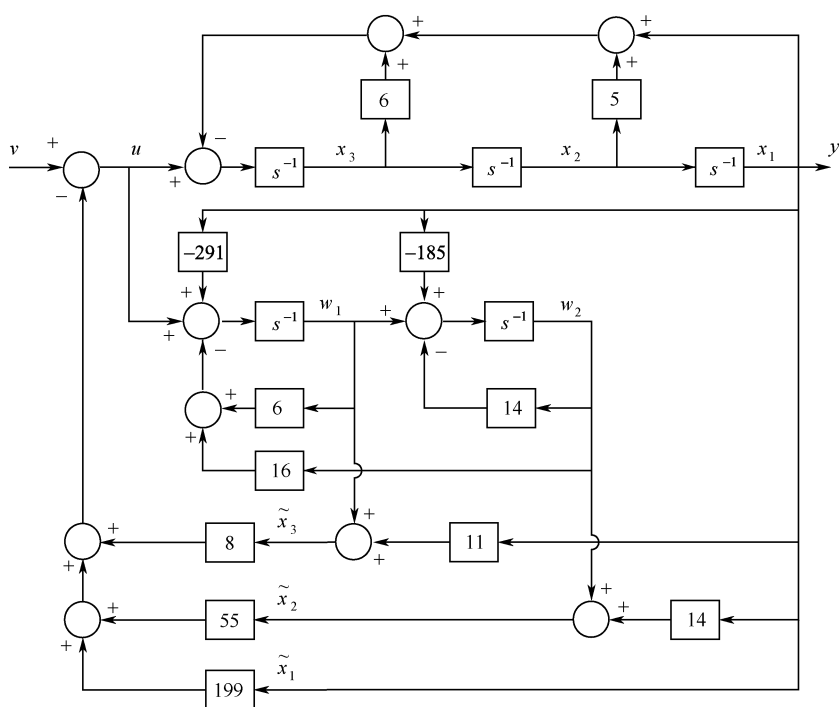


图 5.17 带降维状态重构器的状态反馈系统

表 5.9 实现降维状态重构器设计的 MATLAB 辅助计算

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -5 -6];b=[0;0;1];C=[1 0 0];
>> P=[-2+j*4,-2-j*4,-10];L=[-10,-10,];T=[0 0 1;0 1 0;0 0 0];
>> [Aw,Ay,Bu,G,K]=mini_observer( A,B,C,T,L,P)

Aw =

    -6    -16
     1    -14

Ay =

   -291
   -185

Bu =

     1
     0

G =

    11
    14

K =

    199    55     8
  
```


习 题 5

5-1 某系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

试设计一个状态反馈闭环系统,将其极点配置为 -15 、 $-2 \pm j3$ 并画出闭环系统结构图。

5-2 某系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2.5 & 1 & 2 \\ 2.5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

试问能否通过状态反馈实现系统镇定?

5-3 假设系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+3)} & 0 \\ \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

试设计一个带补偿器的闭环反馈系统,使其传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(2s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

5-4 假设系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的系数矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试分析其输入和输出之间的耦合性,若存在耦合关系,则设计一个状态反馈解耦系统。

5-5 一个带全维状态重构器的状态反馈系统如图 5.18 所示,试求:

- (1) 重构状态随系统状态变化的规律。
- (2) 在稳定工作状态下状态反馈系统的极点。

5-6 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

试设计一个带全维状态重构器的状态反馈闭环系统,将闭环系统的极点配置在 -2 和 -1 ,使重构状态误差以 $t^m e^{-10t}$ (m 为实数)的线性组合方式衰减变化,并绘出系统结构图。

5-7 试为题 5-6 系统设计一个带降维状态重构器的闭环反馈系统,使其功能与题 5-6 系统的功能相同并画出结构图。

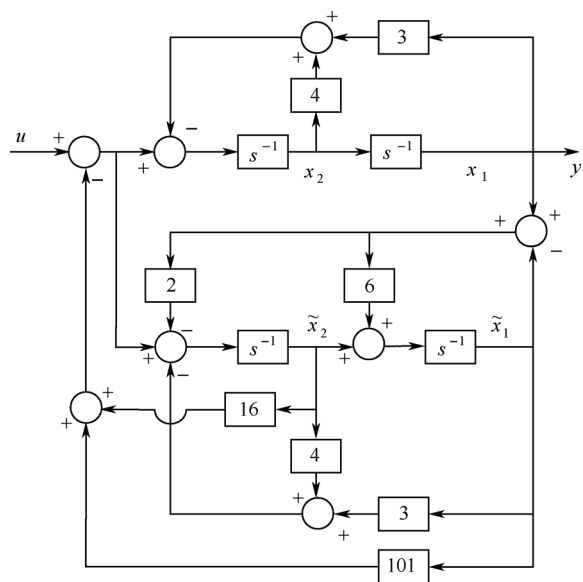


图 5.18 带全维状态重构器的状态反馈系统

第6章 最优控制

内容提示:本章论证系统的最优控制,包括拉格朗日乘子法、线性二次型最优控制、极小值原理、离散系统最优控制、动态规划法及有关的 MATLAB 编程与计算。

最优控制指的是在满足约束条件和边界条件的情况下、能使系统评价指标最小化(或最大化)的控制。

最优控制的评价指标一般是控制向量 $u(t)$ 和状态向量 $x(t)$ 的函数,称为泛函数,简称泛函,表征能量消耗、时间耗费、瞬态或稳态误差等。

最优控制的约束条件是对评价指标最小(或最大)化过程提出的一些限制条件,例如限制控制本身的条件、限制系统工作过程的条件等。

最优控制的边界条件是限制始端时间和状态、终端时间和状态的条件。

6.1 泛函及其变分法简介

1. 泛函定义

假设 $F=\{x(t)\}$ 是给定的同一类函数, R 是实数集合,如果对于 F 中的每一个函数 $x(t)$, 在 R 中有一个变量 J 按照一定的规律与之对应,则 J 为依赖于函数 $x(t)$ 变化的函数,称为 $x(t)$ 的泛函,记作 $J[x(t)]$, $x(t)$ 称为泛函 $J[x(t)]$ 的宗量,类函数 $F=\{x(t)\}$ 称为泛函的定义域,定义域内的所有函数 $x(t)$ 称为容许函数。

根据上述定义,泛函 $J[x(t)]$ 的值是数,而它的自变量是函数 $x(t)$,而 $x(t)$ 又有自变量 t 。泛函 $J[x(t)]$ 的值既不取决于 t 的某个值,也不取决于 $x(t)$ 的某个值,而是取决于整个函数 $x(t)$ 及其自变量 t 的变化区间。

(1) 线性泛函

具有可叠加性与齐次性的泛函称为线性泛函,即

$$\textcircled{1} J[x_1(t)+x_2(t)]=J[x_1(t)]+J[x_2(t)] \quad (\text{可叠加性}) \quad (6-1)$$

$$\textcircled{2} J[cx(t)]=cJ[x(t)] \quad (\text{齐次性}) \quad (6-2)$$

其中, c 为常数。

(2) 二次型泛函

具有下列特性的泛函称为二次型泛函:

$$\textcircled{1} J[x_1(t)]+J[x_2(t)]=\frac{1}{2}\{J[x_1(t)+x_2(t)]+J[x_1(t)-x_2(t)]\} \quad (6-3)$$

$$\textcircled{2} J[cx(t)]=c^2 J[x(t)] \quad (6-4)$$

2. 宗量变分

宗量函数 $x(t)$ 与另一宗量函数 $\bar{x}(t)$ 之差称为宗量 $x(t)$ 在 $\bar{x}(t)$ 上的变分,记为 δx ,即

$$\delta x = x(t) - \bar{x}(t) \quad (6-5)$$

函数变分 δx 与函数增量 Δx 是两个完全不同的概念。当 t 固定时, δx 是两个函数值 $x(t)$ 与 $\bar{x}(t)$ 之差,而 Δx 是函数 $x(t)$ 自己在 t 处由其自变量增量 Δt 产生的增量,即

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$

3. 泛函 $J[x(t)]$ 的变分

如果由宗量变分 δx 引起的泛函增量可表示为

$$\Delta J[x(t)] = J[x(t) + \delta x] - J[x(t)] = L[x(t), \delta x] + o(\delta x)$$

其中, $L[x(t), \delta x]$ 与 δx 成线性关系, $o(\delta x)$ 是 δx 的高阶无穷小, 即

$$\lim_{\max \|\delta x\| \rightarrow 0} \frac{o(\delta x)}{\|\delta x\|} \rightarrow 0$$

则 $L[x(t), \delta x]$ 是泛函增量的线性主部, 称为泛函 $J[x(t)]$ 在 $x(t)$ 上由宗量变分 δx 所引起的变分, 记作 δJ , 并且

$$\delta J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} J[x(t) + \epsilon \delta x] \quad (6-6a)$$

显然, 上式极限可化为

$$\delta J = \frac{\partial J[x(t)]}{\partial x} \delta x \quad (6-6b)$$

4. 泛函 $J[x(t)]$ 的极值

若宗量 $\bar{x}(t)$ 与邻近的任一容许宗量 $x(t)$ 上的泛函值满足

$$J[x(t)] - J[\bar{x}(t)] \geq 0 \quad (6-7)$$

则称泛函 $J[x(t)]$ 在 $\bar{x}(t)$ 上取得极小值, $\bar{x}(t)$ 称为极值函数, 其变化曲线称为极值轨线。

类似地, 可定义泛函的极大值。

泛函在 $\bar{x}(t)$ 上存在极值的必要条件是

$$\delta J[\bar{x}(t)] = 0 \quad (6-8)$$

此时, $\bar{x}(t)$ 称为逗留函数或平稳函数, $J[\bar{x}(t)]$ 称为驻值或平稳值。

5. 泛函变分规则

(1) 两泛函 $J_1[x(t)]$ 与 $J_2[x(t)]$ 线性和的变分

$$\delta(J_1 + J_2) = \delta J_1 + \delta J_2 \quad (6-9)$$

(2) 两泛函 $J_1[x(t)]$ 与 $J_2[x(t)]$ 乘积的变分

$$\delta(J_1 \cdot J_2) = \delta J_1 \cdot J_2 + J_1 \cdot \delta J_2 \quad (6-10)$$

(3) 两泛函 $J_1[x(t)]$ 与 $J_2[x(t)]$ 商的变分

$$\delta\left(\frac{J_1}{J_2}\right) = \frac{\delta J_1 \cdot J_2 - J_1 \cdot \delta J_2}{J_2^2} \quad (6-11)$$

(4) 泛函导数的变分

$$\delta \frac{d^n J[x]}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} \delta J[x] \quad (6-12)$$

(5) 泛函积分的变分

$$\delta \int_{t_0}^t J[x] dt = \int_{t_0}^t \delta J[x] dt = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial J[x]}{\partial x} \delta x \right) dt \quad (6-13)$$

$$\delta \int_{t_0}^t J[x, \dot{x}] dt = \int_{t_0}^t \delta J[x, \dot{x}] dt = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial J[x]}{\partial x} \delta x + \frac{\partial J[x]}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt \quad (6-14)$$

(6) 多宗量泛函及其变分

拥有两个以上宗量的泛函称为多宗量泛函, 例如

$$J[\mathbf{x}(t)] = J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

$$J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]$$

等均为多宗量泛函。

多宗量泛函的变分为

$$\delta J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\partial \mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad (6-15)$$

$$\delta \int_{t_0}^t J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] dt = \int_{t_0}^t (\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\partial \mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\partial \dot{\mathbf{x}}}) dt \quad (6-16)$$

$$\delta J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \mathbf{u}]}{\partial \mathbf{x}} + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \mathbf{u}]}{\partial \mathbf{u}} \quad (6-17)$$

$$\delta \int_{t_0}^t J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] dt = \int_{t_0}^t (\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \mathbf{u}]}{\partial \mathbf{x}} + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial J[\mathbf{x}, \mathbf{u}]}{\partial \mathbf{u}}) dt \quad (6-18)$$

从以上诸式可以看出,泛函的变分规则与函数的微分规则在形式上完全类似,但其含义是完全不同的。

6.2 最优控制及其变分解法

6.2.1 数学模型

常见最优控制问题的一般数学描述为:

已知系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-19)$$

求最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$, 使目标泛函满足

$$J[\mathbf{u}^*(t)] = \min\{J[\mathbf{u}(t)]\} \quad (6-20)$$

s. t.

$$\zeta(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \begin{bmatrix} \zeta_1(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\ \zeta_2(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\ \vdots \\ \zeta_\mu(\mathbf{x}(t_0), t_0) \end{bmatrix} = 0 \quad (6-21)$$

$$\xi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \xi_2(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \vdots \\ \xi_\eta(\mathbf{x}(t_f), t_f) \end{bmatrix} = 0 \quad (6-22)$$

1. 目标泛函

式(6-20)中的 $J[\mathbf{u}(t)]$ 称为目标泛函, 表征最优控制评价指标, 有以下几种类型。

(1) 积分型或拉格朗日(Lagrange)型

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-23)$$

式中, $L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ 称为拉格朗日函数, 是系统动态过程评价指标, 反映对系统能量消耗和瞬态误差等的最小化要求。

(2) 终值型或迈耶耳(Mayer)型

$$J = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) \quad (6-24)$$

式中, $\theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ 是系统终端评价指标, 反映对终端状态偏差和时间的最小化要求。

(3) 综合型或波尔札(Bolza)型

$$J[\mathbf{u}(t)] = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-25)$$

上式是前两种形式的叠加,体现了对终端状态偏差和时间及系统动态过程的综合要求。

从式(6-25)可以看出,目标泛函的宗量包含 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 两类,但因 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 之间存在关系,通过这种关系可消去一类宗量,从而使独立宗量只剩 $\mathbf{u}(t)$ 或 $\mathbf{x}(t)$,二者必居其一。因最优控制问题的核心是确定控制量,故通常将 $\mathbf{u}(t)$ 作为宗量,将目标泛函表示为 $J[\mathbf{u}(t)]$ 。

2. 边界条件

s. t. 是英文 subject to 的缩写,意为“遵循”或“服从”。

式(6-21)是对初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和时间 t_0 提出的限制条件,该条件要求 $\mathbf{x}(t_0)$ 和 t_0 必须在由向量方程 $\zeta(\mathbf{x}(t_0), t_0) = 0$ 确定的超曲面交集上。

式(6-22)是对终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 和时间 t_f 提出的限制条件,该条件要求 $\mathbf{x}(t_f)$ 和 t_f 必须在由向量方程 $\xi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$ 确定的超曲面交集上。

综上所述,最优控制问题可描述为:

在满足边界条件的前提下,在所有容许控制 $\mathbf{u}(t)$ 中,求能把系统从某个初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到某个终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 且目标泛函 $J[\mathbf{u}(t)]$ 取得最小值的控制 $\mathbf{u}^*(t)$,使得

$$J[\mathbf{u}^*(t)] \leq J[\mathbf{u}(t)]$$

除了边界条件以外,有些最优控制还有其他一些约束条件,对系统动态过程进行限制,要求系统状态 $\mathbf{x}(t)$ 和控制 $\mathbf{u}(t)$ 必须位于由一些等式所确定的交集上和由一些不等式所确定的区域内。

3. 最优轨线

在最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 的作用下,系统状态的运动轨迹称为最优轨线。

6.2.2 求解最优控制问题的变分法——拉格朗日乘子法

泛函极值问题可用变分法求解。拉格朗日乘子法是求解受等式约束的泛函极值问题的一种变分法。下面针对综合型目标泛函式(6-25)的约束极值问题论证该方法。

将状态方程化为 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} = 0$ 并引入 n 维待定函数向量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$, 对 $\zeta(\mathbf{x}(t_0), t_0) = 0$ 引入与其同维的待定常数向量 $\boldsymbol{\mu}$, 对 $\xi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$ 引入与其同维的待定常数向量 $\boldsymbol{\eta}$, 构造增广泛函

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0) \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f) \boldsymbol{\eta} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\} dt \end{aligned} \quad (6-26)$$

于是,约束泛函极值问题就转化为求增广泛函的无约束极值问题,其中, t_0 和 $\mathbf{x}(t_0)$ 、 t_f 和 $\mathbf{x}(t_f)$ 以及 \mathbf{u} 和 \mathbf{x} 均为相互独立的参量, $\boldsymbol{\lambda}$ 、 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 为拉格朗日乘子。

在上式中,引进哈密尔顿(Humilton)函数,即

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-27)$$

可得

$$\hat{J} = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0) \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f) \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t_f} \{H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}\} dt \quad (6-28)$$

将上式中的后一项积分 $\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} dt$ 用分步积分法计算出来并代入上式,得

$$\begin{aligned}\hat{J} = & \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0) \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f) \boldsymbol{\eta} \\ & + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}\} dt\end{aligned}\quad (6-29)$$

根据泛函极值条件和多宗量泛函变分计算规则,上式的极值条件为

$$\begin{aligned}\delta \hat{J} = & \delta \mathbf{x}^T(t_0) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}(t_0) \right] \\ & + \delta t_0 \left\{ \dot{\mathbf{x}}^T(t_0) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}(t_0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial t_0} \boldsymbol{\mu} - H[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \boldsymbol{\lambda}(t_0), t_0] \right\} \\ & + \delta \mathbf{x}^T(t_f) \left[\frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \right] \\ & + \delta t_f \left\{ \dot{\mathbf{x}}^T(t_f) \left[\frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} \boldsymbol{\eta} + H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] \right\} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \delta \mathbf{x}^T \left(\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{u}} \right\} dt = 0\end{aligned}\quad (6-30)$$

考虑到增广泛函 \hat{J} 中的 t_0 、 $\mathbf{x}(t_0)$ 、 t_f 、 $\mathbf{x}(t_f)$ 、 \mathbf{u} 和 \mathbf{x} 等参量相互独立且其变分不为0,可得

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (6-31)$$

$$\text{状态方程} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (6-32)$$

$$\text{协态方程} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-33)$$

横截(或贯截)条件

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0 \quad (6-34)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial t_0} \boldsymbol{\mu} - H[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \boldsymbol{\lambda}(t_0), t_0] = 0 \quad (6-35)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} \quad (6-36)$$

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} \boldsymbol{\eta} + H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] = 0 \quad (6-37)$$

边界条件

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = 0 \quad (6-38)$$

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (6-39)$$

式(6-31)~式(6-39)便是上一小节最优控制问题的定解条件。下面就这些公式作如下说明:

(1) 对于线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u} \\ H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = & L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}] \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = & - \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} = - \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda} - \frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}\quad (6-40)$$

当拉格朗日函数不显含 \mathbf{x} 时

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (6-41)$$

以上两式表明,协态方程伴随状态方程而存在,因此,该方程也称为伴随方程,与之相对应, n 维函数向量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 称为协态向量或伴随向量。

状态方程和协态方程统称为哈密尔顿正则方程。

(2) 横截(或贯截)条件式(6-34)~式(6-37)是系统状态轨线穿过由始端和终端约束条件确定的超曲面边界时必须满足的条件。

① 式(6-34)是因始端边界存在状态限制条件而推导出的,显然,它是一个向量方程,含有 n 个方程,当始端状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 给定时, $\delta\mathbf{x}(t_0) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0$, 该式不存在,而同时边界条件式(6-38)变为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 。

同理,当始端时间 t_0 给定时, $\delta t_0 = 0$, 式(6-35)不存在。

② 式(6-36)是因终端边界存在状态限制条件而推导出的,它也是一个向量方程。当终端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 给定时, $\delta\mathbf{x}(t_f) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(t_f) = 0$, 该式不存在,而同时边界条件式(6-39)变为 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 。

同理,当终端时间 t_f 给定时, $\delta t_f = 0$, 式(6-37)不存在。

③ 当目标泛函是拉格朗日型且终端状态无约束时,横截条件式(6-36)变为

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$$

(3) 正则方程为 $2n$ 维方程,解方程后有 $2n$ 个待定常数,加上 t_0 和 t_f 以及待定常数向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$, 共有 $2n+2+\mu+\eta$ 个未知量。横截条件有 $2n+2$ 个方程,边界条件有 $\mu+\eta$ 个方程,合起来也是 $2n+2+\mu+\eta$ 方程,正好满足正则方程定解条件。

(4) 以上各式是根据目标泛函的极值条件 $\delta\hat{J}=0$ 得出的,而极值有极大与极小之分,怎能判定是极小值呢? 严格地讲,只有当泛函的二阶变分 $\delta^2\hat{J}\geq 0$ 时才能确认是极小值。而且即便是极小值,也不一定就是最小值。不过,最优控制问题性质使然,满足 $\delta\hat{J}=0$ 的极值一般就是最小值。

【例 6.1】 假设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求把系统从状态 $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 10]^T$ 转移到边界 $x_1(5) + x_2(5) = 1$ 上且使目标泛函

$$J(u) = x_1^2(5) + x_2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2 dt$$

取得最小值的控制。

解 这是一个始端状态与时间给定、终端时间给定而终端状态受约束的最优控制问题。

系统的哈密尔顿函数为

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}] = \frac{1}{2}u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -3x_1 - 4x_2 + u \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-3x_1 - 4x_2 + u)$$

系统的哈密尔顿正则方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{E1})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \quad (\text{E2})$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \quad (\text{E3})$$

由式(E1)和式(E2)知,状态方程与协态方程不存在耦合关系,故可独立求解,毋须联立求解。

(1) 解协态方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \lambda = \mathbf{A}\lambda \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s-4}{(s-3)(s-1)} & \frac{3}{(s-3)(s-1)} \\ \frac{-1}{(s-3)(s-1)} & \frac{s}{(s-3)(s-1)} \end{bmatrix} \\ e^{\mathbf{A}t} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^t & \frac{3}{2}(e^{3t} - e^t) \\ -\frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) & \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是可得

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \lambda(0) = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^t)\lambda_1(0) + \frac{3}{2}(e^{3t} - e^t)\lambda_2(0) \\ -\frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)\lambda_1(0) + (\frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t)\lambda_2(0) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 3k_1e^t + k_2e^{3t} \\ k_1e^t + k_2e^{3t} \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

式中,为简化书写,引入了两个常数,即

$$k_1 = \frac{1}{2}[\lambda_1(0) - \lambda_2(0)] \quad (\text{E5})$$

$$k_2 = \frac{1}{2}[3\lambda_2(0) - \lambda_1(0)] \quad (\text{E6})$$

(2) 解控制方程

由式(E3)和式(E4)得

$$u = -\lambda_2 = -k_1e^t - k_2e^{3t} \quad (\text{E7})$$

(3) 解状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\ \frac{-3}{(s+3)(s+1)} & \frac{s}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix} \\ e^{\mathbf{A}t} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ -\frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

① 自由运动分量

$$\mathbf{x}_{x0} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ -\frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ -5e^{-t} + 15e^{-3t} \end{bmatrix}$$

② 受控运动分量

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s)] = -L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)}(\frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-3}) \\ \frac{s}{(s+3)(s+1)}(\frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-3}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(2k_1+k_2)e^{-t} - \frac{1}{24}(3k_1+2k_2)e^{-3t} - \frac{1}{24}k_2e^{3t} - \frac{1}{8}k_1e^t \\ -\frac{1}{8}(2k_1+k_2)e^{-t} + \frac{1}{8}(3k_1+2k_2)e^{-3t} - \frac{1}{8}k_2e^{3t} - \frac{1}{8}k_1e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

③ 状态向量

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{x0} + \mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{8}(2k_1+k_2)+5\right]e^{-t} - \left[\frac{1}{24}(3k_1+2k_2)+5\right]e^{-3t} - \frac{1}{24}k_2e^{3t} - \frac{1}{8}k_1e^t \\ -\left[\frac{1}{8}(2k_1+k_2)+5\right]e^{-t} + \left[\frac{1}{8}(3k_1+2k_2)+15\right]e^{-3t} - \frac{1}{8}k_2e^{3t} - \frac{1}{8}k_1e^t \end{bmatrix} \quad (\text{E8})$$

(4) 确定系数

① 横截条件

令

$$\begin{aligned} \xi &= x_1(5) + x_2(5) - 1 \\ \theta &= x_1^2(5) + x_2(5) \end{aligned}$$

横截条件为

$$\lambda_1(5) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1(5)} + \frac{\partial \xi}{\partial x_1(5)} \eta = 2x_1(5) + \eta \quad (\text{E9})$$

$$\lambda_2(5) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2(5)} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2(5)} \eta = 1 + \eta \quad (\text{E10})$$

式中, η 为待定拉格朗日乘子。

从式(E9)和式(E10)中消去 η , 得

$$2x_1(5) + \lambda_2(5) - \lambda_1(5) - 1 = 0 \quad (\text{E11a})$$

从式(E8)中求出 $x_1(5)$, 从式(E4)中求出 $\lambda_1(5)$ 和 $\lambda_2(5)$ 并代入式(E11a), 可得

$$\left(\frac{1}{2}e^{-5} - \frac{9}{4}e^5 - \frac{1}{4}e^{-15}\right)k_1 + \left(\frac{1}{4}e^{-5} - \frac{1}{6}e^{-15} - \frac{1}{12}e^{15}\right)k_2 + 10(e^{-5} - e^{-15}) - 1 = 0 \quad (\text{E11b})$$

② 边界条件

$$\xi = x_1(5) + x_2(5) - 1 = 0 \quad (\text{E12a})$$

从式(E8)中求出 $x_1(5)$ 和 $x_2(5)$ 并代入上式, 可得

$$\left(\frac{1}{4}e^{-15} - \frac{1}{4}e^5\right)k_1 + \left(\frac{1}{6}e^{-15} - \frac{1}{6}e^{15}\right)k_2 + 10e^{-15} - 1 = 0 \quad (\text{E12b})$$

联立式(E11b)和式(E12b), 解方程组得

$$k_1 = -0.0014, k_2 = -1.742 \times 10^{-6}$$

(5) 解集

① 状态向量

将 k_1 和 k_2 的值代入式(E8), 得

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 5e^{-3t} + 7.258 \times 10^{-8}e^{3t} + 1.75 \times 10^{-4}e^t \\ -5e^{-t} + 15e^{-3t} + 2.178 \times 10^{-7}e^{3t} + 1.75 \times 10^{-4}e^t \end{bmatrix} \quad (\text{E13})$$

最优轨线的变化曲线如图 6.1 所示。

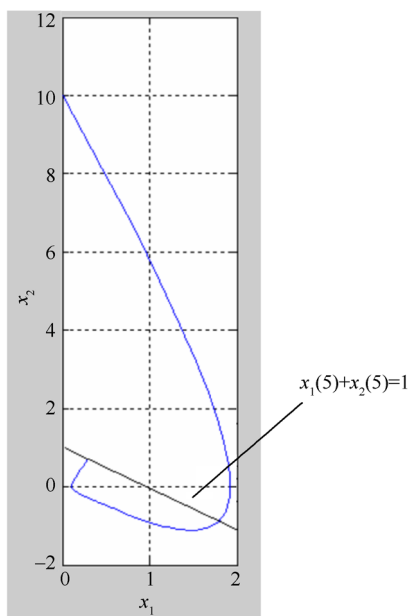


图 6.1 最优轨线变化曲线

② 协态向量

将 k_1 和 k_2 的值代入式(E4), 得

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0042e^t - 1.742 \times 10^{-6} e^{3t} \\ -0.0014e^t - 1.742 \times 10^{-6} e^{3t} \end{bmatrix} \quad (\text{E14})$$

③ 最优控制

由式(E7)可得

$$u = -\lambda_2 = 0.0014e^t + 1.742 \times 10^{-6} e^{3t} \quad (\text{E15})$$

④ 目标泛函值

$$J(u) = x_1^2(5) + x_2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2 dt = 1.8447$$

6.3 线性二次型最优控制

系统是线性的而目标泛函是二次型泛函的最优控制称为线性二次型最优控制,其特点是最优控制可通过状态反馈来构造,只要系统状态能控和能观测,不论原系统是否稳定,最优控制必定存在且最优控制系统必定是稳定的。

6.3.1 线性二次型最优控制的目标泛函

目标泛函是系统评价指标的数学表达式,最优控制追求目标不同,目标泛函也不同,最常见的二次型问题的目标泛函有以下几种类型。

1. 实现跟踪输出的目标泛函

以实现系统实际输出 $y(t)$ 跟踪理想输出 $y_d(t)$ 为追求目标的最优控制问题称为输出跟踪

问题,其目标泛函的一般形式为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-42)$$

式中:

$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t)$ 为 q 维输出误差向量;

$\mathbf{u}(t)$ 为 p 维输入向量;

$\mathbf{R}(t)$ 为 $p \times p$ 维正定矩阵;

$\mathbf{Q}(t)$ 为 $q \times q$ 维半正定矩阵;

\mathbf{Q}_f 为 $q \times q$ 维半正定矩阵;

式(6-42)比较全面地表达了对复杂控制系统的性能要求。

(1) 目标泛函的第一项指标 $\frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{e}(t_f)$ 反映对终端输出误差的最小化要求,其中, \mathbf{Q}_f 为终端输出误差加权系数矩阵,其元素的大小标志着各终端输出误差分量在性能指标中所占的权重。

(2) 第一项积分 $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) dt$ 反映对动态输出误差的最小化要求,其中, $\mathbf{Q}(t)$ 为动态输出误差加权函数矩阵,其元素的大小标志着各动态输出误差分量在性能指标中所占的权重。

(3) 第二项积分 $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt$ 反映对能量的最小化要求,其中, $\mathbf{R}(t)$ 为动态控制加权函数矩阵,其元素的大小标志着与各控制量对应的能量消耗在性能指标中所占的权重。

(4) \mathbf{Q}_f 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 三者之间的相对大小,反映了终端输出误差、动态输出误差和动态能量消耗三者间的相对重要性。

(5) $\mathbf{Q}(t)$ 随时间变化的相对大小反映了动态输出误差在不同时间上的相对重要性。同理, $\mathbf{R}(t)$ 随时间变化的相对大小反映了动态能量消耗在不同时间上的相对重要性。

以实现快速跟踪为最优控制目标的控制器称为跟踪器。

2. 实现调节输出的目标泛函

以实现零输出(即理想输出 $\mathbf{y}_d(t) = 0$)为追求目标的最优控制问题称为输出调节问题,其目标泛函的一般形式为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-43)$$

式中,各指标项及其加权矩阵的意义与上面的定义类似。

以实现快速调节输出为最优控制目标的控制器称为输出调节器。

3. 实现调节状态的目标泛函

以实现平衡状态为追求目标的最优控制问题称为状态调节问题,其目标泛函的一般形式为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-44)$$

式中:

$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f)$ 反映对终端状态误差的最小化要求,其中, \mathbf{Q}_f 为终端状态误差加权矩阵,

是 $n \times n$ 维对称半正定矩阵;

$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) dt$ 反映对动态状态误差的最小化要求, 其中, $\mathbf{Q}(t)$ 为动态状态误差加权矩阵, 是 $n \times n$ 维对称半正定矩阵;

$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt$ 反映对能量的最小化要求, 其中, $\mathbf{R}(t)$ 为动态控制加权矩阵, 是 $p \times p$ 维对称正定矩阵。

以实现快速调节状态为最优控制目标的控制器称为状态调节器。

调节问题依终端时间 t_f 的大小分为有限时间和无限时间两类: 当 t_f 为有限值时, 称为有限时间问题; 当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 称为无限时间问题。

为便于数学处理, 二次型最优控制的加权矩阵 \mathbf{Q}_f 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 一般取为对角线矩阵。

6.3.2 状态调节器及其 MATLAB 辅助设计

1. 有限时间状态调节器

(1) 数学模型

给定线性时变系统动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}\end{aligned}$$

又给定终端状态误差加权矩阵 \mathbf{Q}_f 和动态状态误差加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 、动态控制加权矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 及初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 求在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (6-45)$$

取得最小值的控制, 旨在把系统状态从 $\mathbf{x}(t_0)$ 快速调节到平衡状态。

在上面和后面的表达式中, 为简化书写, 凡不会引起混乱和误解的地方, 通通省略变量的时间符号。

(2) 状态调节器的设计原理

有限时间状态调节器问题是一个始端给定, 终端时间给定的最优控制问题。应用前面第 6.2 节变分法的计算公式并依次向下代入, 可得:

哈密尔顿函数

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}] \quad (6-46)$$

控制方程

$$\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (6-47)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (6-48)$$

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (6-49)$$

伴随方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (6-50)$$

横截条件

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \right] = \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \quad (6-51)$$

由式(6-49)和式(6-50)可以看出,状态方程和协态方程之间存在耦合关系,其解须联立求取,即

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

这是一个 $2n$ 维的齐次微分方程,从理论上讲,解该方程并根据给定初始状态和横截条件可确定状态向量 \mathbf{x} 和协态向量 $\boldsymbol{\lambda}$,进而可确定最优控制及其对应的最优轨线。然而对于大多数实际线性时变系统,计算状态转移矩阵原本就比较困难,计算上式的矩阵指数函数就更为困难,因此直接求解该方程比较困难。能否绕过求上式矩阵指数函数、另辟奇径解决问题呢?研究表明,只要系统状态能控,最优控制可通过状态反馈来构造。

令

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (6-52)$$

将上式代入式(6-48)和式(6-49),可得

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{K}(t)\mathbf{x} \quad (6-53)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x} \quad (6-54)$$

式中, $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ 为状态反馈矩阵。

于是,只要求得了矩阵 $\mathbf{P}(t)$,一切问题便迎刃而解了。为此下面转而研究 $\mathbf{P}(t)$ 。

对式(6-52)求一阶导数并将式(6-50)和式(6-54)代入,得

$$\text{左边} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

$$= \text{右边} = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{P}(t)[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x} \quad (6-55)$$

因在过渡过程中, $\mathbf{x}(t) \neq 0$,故等式两边消去公因子 \mathbf{x} ,得

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (6-56)$$

这是一个黎卡提矩阵微分方程,求解该方程的边界条件可从横截条件得出。

由式(6-51)和式(6-52)直接可得

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{Q}_f \quad (6-57)$$

将式(6-56)和式(6-57)进行转置,并考虑到 \mathbf{Q}_f 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 为对角线矩阵,得

$$\dot{\mathbf{P}}^T(t) = -\mathbf{P}^T(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}^T(t) + \mathbf{P}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}^T(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (6-58)$$

$$\mathbf{P}^T(t_f) = \mathbf{Q}_f \quad (6-59)$$

从式(6-56)~式(6-59)可以看出, $\mathbf{P}(t)$ 和 $\mathbf{P}^T(t)$ 满足同一边界条件的黎卡提微分方程,根据解的唯一性,它是对称矩阵,即

$$\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}(t) \quad (6-60)$$

黎卡提矩阵微分方程是一个非线性微分方程,尽管其解是唯一的正定对称矩阵,但通常不能求得解析解,只能用计算机求其数值解。由于边界条件在终端处,所以求解过程须从终端时间开始到初始时间为止逆向进行。因此,黎卡提矩阵微分方程求解运算不能与最优控制运算同步进行,必须事先完成并存入计算机。之后,再按顺向时间进行最优控制运算。

再来分析最小目标泛函值。

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}] = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}} \quad (6-61)$$

将状态方程和黎卡提方程代入上式并考虑到 $\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}(t)$,经配项整理可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}] = & -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \\ & + [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}]^T \mathbf{R}(t) [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (6-62)$$

由式(6-53), $\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x} = 0$, 故

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}] = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \quad (6-63)$$

对上式等式两边同乘以 $1/2$ 并在时间 $t \in [t_0, t_f]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \\ &= \text{右边} = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \end{aligned}$$

将 $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{Q}_f$ 代入上式并经整理可得

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

上式的左边正好是目标泛函式(6-45), 因此, 最小目标泛函值为

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (6-64)$$

由式(6-63)可知, 状态调节器系统是稳定的, 判定系统稳定的李雅普诺夫 V 函数为 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}$ 。

有限时间状态调节器系统结构如图 6.2 所示。

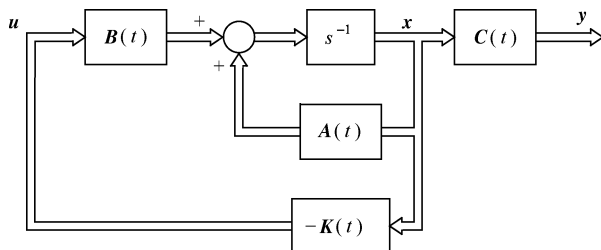


图 6.2 有限时间调节器系统结构图

(3) 设计步骤

① 检验系统 $\sum(A(t), B(t))$ 的能控性。

② 确定加权矩阵 $\mathbf{Q}_f, \mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 。

③ 求解黎卡提矩阵微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= -\mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \\ \mathbf{P}(t_f) &= \mathbf{Q}_f \end{aligned}$$

④ 求解调节器系统状态方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \\ \dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{K}(t)] \mathbf{x} \end{aligned}$$

⑤ 求最优控制:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}$$

⑥ 求最小目标泛函值:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

⑦ 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q} 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 并重新计算,直到满意为止。

2. 线性定常无限时间状态调节器

(1) 数学模型

对于线性定常系统, $t_f \rightarrow \infty$ 的状态调节问题的数学描述如下:

给定系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

求在时区 $t \in [0, \infty)$ 使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (6-65)$$

取得最小值的控制,旨在把系统状态从 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 快速调节到平衡状态。

$t_f \rightarrow \infty$ 的状态调节问题与有限时间状态调节问题的不同之处主要有以下 3 点。

第一,目标泛函中无终端状态误差项 $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f)$ 。这是因为当 $t_f \rightarrow \infty$ 时,系统进入稳态过程,该项对寻求最优控制的最小化计算无意义。

第二,由式(6-57)可知, $\mathbf{P}(\infty) = \text{const}$ 。因此,对于无限时间状态调节问题, $\dot{\mathbf{P}} = 0$, 黎卡提矩阵微分方程退化为矩阵代数方程。

第三,因矩阵代数方程与边界条件无关,所以黎卡提矩阵方程求解运算可与最优控制求解运算同步进行,无须事先计算。

(2) 设计方法

无限时间状态调节器的设计方法可从有限时间状态调节器的设计方法移植而来。具体设计步骤如下:

① 检验系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 的能控性。

② 确定动态状态误差加权矩阵 \mathbf{Q} 、动态控制加权矩阵 \mathbf{R} 。

③ 求解黎卡提代数方程:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (6-66)$$

④ 求解调节器系统状态方程:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (6-67)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (6-68)$$

⑤ 求最优控制:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (6-69)$$

⑥ 求最小目标泛函值:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (6-70)$$

⑦ 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 并重新计算,直到满意为止。

(3) 实现调节器设计的 MATLAB 编程与计算

运用 MATLAB 实现调节器设计计算的一个通用程序列于表 6.1。该程序兼有实现状态调节器设计计算与输出调节器设计计算双重功能,当开关量 s1o2=1 时,实现状态调节器设计计算;当 s1o2=2 时,实现输出调节器设计计算。

该程序定义的函数名为 LQ_adjustor,其形参有系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 和加权矩阵 \mathbf{R} 、 \mathbf{Q} 以及初始状态 \mathbf{x}_0 、曲线图时间上限 tmax、状态调节器与输出调节器选择开关量 s1o2 等。

表 6.1 实现调节器设计的 MATLAB 通用程序

```

D:\matlab\bin\LQ_adjustor.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [u, x, y, Jmin, K, P, E] =LQ_adjustor( A, B, C, D, R, Q, x0, tmax, s1o2)
2 % A, B, C, D 分别为系数矩阵: x0 为初始状态向量, u 为最优控制
3 % R 为正定加权矩阵, Q 为正半定加权矩阵, x 为最优轨线, J 为目标泛函值
4 % tmax 为曲线图时间上限, s1o2=1 为状态调节器; s1o2=2 为输出调节器
5 syms t; % 定义符号变量 t
6 if(s1o2==2)
7     Q=C'*Q*C;
8 end
9 [K, P, E]=lqr( A, B, Q, R); %求黎卡提方程矩阵P, 状态反馈阵K及特征值E
10 AK=A-B*K; %调节器系统矩阵
11 Phit=expm(AK*t); % 状态转移矩阵
12 x=simplify(Phit*x0); %最优轨线
13 u=simplify(-K*x); %最优控制
14 Jmin=x0'*P*x0/2; %最小目标泛函值
15 y=simplify(C*x+D*u); %输出响应
16 q=size(C, 1); n=size(x0);
17 for k=1:n
18     subplot(2, 2, k); ezplot(t, x(k), [0, tmax], 1); grid; title(' ')
19     xlabel('时间 t ')
20     ylabel('状态 x')
21 end
22 for k=1:q
23     subplot(2, 2, k); ezplot(t, y(k), [0, tmax], 2); grid; title(' ')
24     xlabel('时间 t ')
25     ylabel('输出量 y ')
26 end
27 end
    
```

该程序中新用到的 MATLAB 命令语句只有一个 lqr, 其调用格式为:

$[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$

其中, A 和 B 分别为系统矩阵和控制矩阵, Q 和 R 分别为加权矩阵, K 、 P 和 E 分别为命令语句 lqr 返回的状态反馈矩阵、黎卡提代数方程的解和调节器系统的特征值。

在命令窗口 Command Window 输入各系数矩阵并调用该程序函数, MATLAB 即进入计算并输出最优控制、最优轨线和输出量的表达式以及最小目标泛函值、状态反馈矩阵、黎卡提方程的解和调节器系统的特征值等, 并绘制出状态变量和输出量随时间变化的曲线。

【例 6.2】 假设系统的动态方程为

$$\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = Cx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

试设计一个使目标泛函 $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Qx + u^T Ru] dt$ 取得最小值的无限时间状态调节器, 以便把系统状态从 $x(0) = [2 \ 1]^T$ 快速调节到平衡状态。

解 因 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 +2 和 -1, 故原系统不稳定。

(1) 系统能控性

能控性矩阵为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 2$, 故系统状态能控。

(2) 选择加权矩阵

预选动态状态误差加权系数矩阵 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 动态控制加权系数 $R = 1$ 。

(3) 解黎卡提矩阵方程

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

假设 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$, 将各系数矩阵代入上式并解方程, 得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

(4) 求解调节器系统状态方程

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [5 \quad 10]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解该方程, 可得

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8e^{-3t} - 6e^{-t} \\ -2e^{-3t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

(5) 求最优控制

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -20e^{-3t}$$

(6) 输出量

$$y = x_2 = -2e^{-3t} + 3e^{-t}$$

(7) 最小目标泛函值

$$J^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = 45$$

(8) 状态调节器系统结构图

状态调节器系统结构如图 6.3 所示。

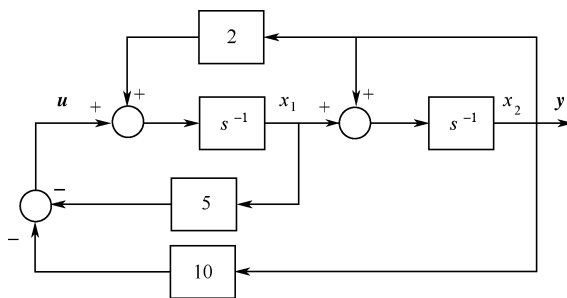


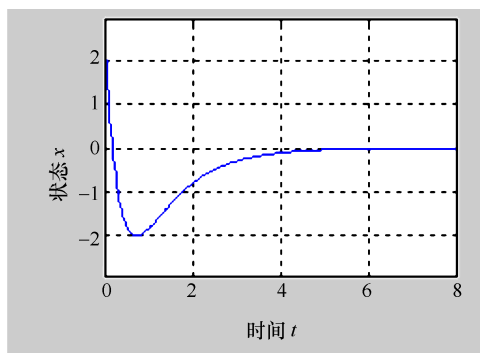
图 6.3 系统结构图

(9) MATLAB 辅助设计

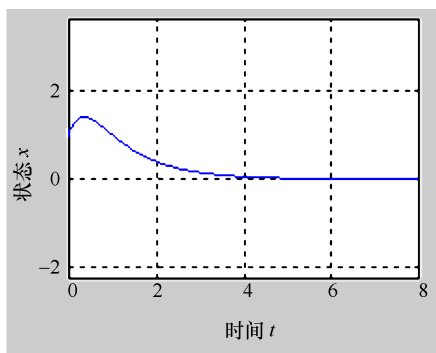
在 MATLAB 命令窗口 Command Window 输入各系数矩阵和调节器选择开关量 $slo2=1$ 并调用表 6.1 程序函数进行计算, 所得计算结果如表 6.2 所示, 状态变量和输出量随时间变化的曲线及最优轨线分别如图 6.4、图 6.5 和图 6.6 所示。从图可以看出, 当时间 $t=5$ 时系统状态即接近于 0, 表明调节过程快速有效。

表 6.2 实现状态调节器设计的 MATLAB 人机交互过程和数据

```
>> A=[0 2;1 1];b=[1;0];C=[0 1];D=0;x0=[2;1];
>> Q=[5 0;0 0];R=1;tmax=10;slo2=1;
>>[u,x,y,Jmin,K,P,E]=LQ_adjustor(A,b,C,D,R,Q,x0,tmax,slo2)
u =
-20/exp(3 * t)
x =
8/exp(3 * t) - 6/exp(t)
3/exp(t) - 2/exp(3 * t)
y =
3/exp(t) - 2/exp(3 * t)
Jmin =
45.0000
K =
5.0000 10.0000
P =
5.0000 10.0000
10.0000 30.0000
E =
-3.0000
-1.0000
```



(a) $x_1(t)$



(b) $x_2(t)$

图 6.4 状态变量变化曲线

MATLAB 计算数据表 6.2 与上面计算结果互为对证。

另外, MATLAB 辅助计算还同时给出了状态调节器系统矩阵 $A-BK=\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特

征值 $E=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, 表明最优控制把原来不稳定的系统变为稳定系统。

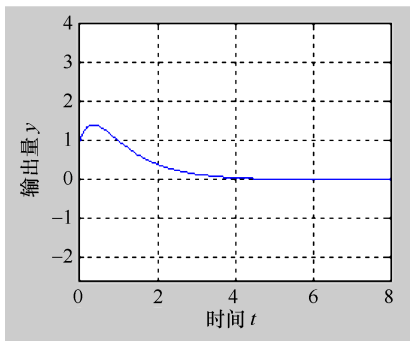


图 6.5 输出量变化曲线

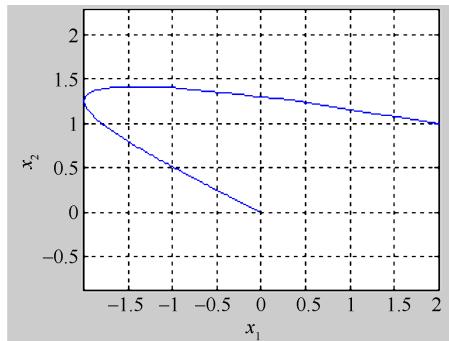


图 6.6 最优轨线

6.3.3 输出调节器

1. 有限时间输出调节器

有限时间输出调节问题的数学描述如下：

给定线性时变系统动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

又给定终端输出误差加权矩阵 \mathbf{Q}_f 和动态输出误差加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 、动态控制加权矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 及初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ，求在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (6-71)$$

取得最小值的控制，旨在把系统输出快速调节到 0。

从例 6.2 的图 6.4 和图 6.5 可以看出，当系统状态由非零状态调节到 0 时，输出量也被同时调节到 0，这表明输出调节和状态调节的本质是相同的。

将输出方程代入目标泛函，可得

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) [\mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f)] \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{x}^T [\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)] \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \} dt$$

令

$$\bar{\mathbf{Q}}_f = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f) \quad (6-72)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) \quad (6-73)$$

可得

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \bar{\mathbf{Q}}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (6-74)$$

把上式与式(6-45)进行比较，显而易见，二者在形式上完全一致。只要 $\bar{\mathbf{Q}}_f$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ 是对称半正定矩阵，那么二者的性质也完全一致，从而就可把状态调节器求解方法直接应用于求解输出调节器问题。为此，下面转而研究 $\bar{\mathbf{Q}}_f$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ 的对称性和定号性。

首先，因 \mathbf{Q}_f 和 $\mathbf{Q}(t)$ 是对称矩阵，故根据式(6-72)和式(6-73)， $\bar{\mathbf{Q}}_f$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ 也是对称矩阵。

其次，若系统状态能观测，则在 $t \in [t_0, t_f]$ ， $\mathbf{C}^T(t) \neq 0$ 。故当 $\mathbf{Q}(t)$ 半正定时，必有

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{y} \geq 0$$

将输出方程代入上式，可得

$$\mathbf{x}^T[\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x}\geq 0$$

这就证明 $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ 是半正定矩阵。

同理可证明 $\bar{\mathbf{Q}}_f$ 也是半正定矩阵。

于是就可以把状态调节器的有关结论直接移植过来了。

有限时间输出调节器的设计步骤如下：

(1) 检验系统 $\sum(\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$ 的能观测性。

(2) 确定加权矩阵 \mathbf{Q}_f 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 。

(3) 求解黎卡提矩阵微分方程：

$$\dot{\mathbf{P}}(t)=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) \quad (6-75)$$

$$\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{Q}_f\mathbf{C}(t_f) \quad (6-76)$$

(4) 求解调节器系统状态方程：

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (6-77)$$

$$\dot{\mathbf{x}}=[\mathbf{A}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x} \quad (6-78)$$

(5) 求最优控制：

$$\mathbf{u}=-\mathbf{K}(t)\mathbf{x} \quad (6-79)$$

(6) 计算最小目标泛函值：

$$J^*=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (6-80)$$

(7) 计算输出量：

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

(8) 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q}_f 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 并重新计算,直到满意为止。

把状态调节器与输出调节器进行比较,不难看出,除了黎卡提矩阵微分方程(从而矩阵 $\mathbf{P}(t)$)不同以外,其他表达式均相同。特别是输出调节器也是通过状态反馈实现的,而不是通过输出反馈实现的。这表明,输出调节器与状态调节器在本质上是一样的。事实上,状态调节器的调节目标是把偏离平衡状态的系统恢复到平衡状态,对于线性系统来说,平衡状态就是零状态,而与零状态对应的输出也是 0,输出为 0 也正是输出调节器的调节目标。当然,由于 $\mathbf{P}(t)$ 不同,两种调节器的实际最优控制和最优轨线是不同的。

输出调节器系统结构与状态调节器系统结构相同,如图 6.2 所示。

2. 线性定常无限时间输出调节器

线性定常系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

$t_f \rightarrow \infty$ 的输出调节问题的目标泛函为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty[\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}]\mathrm{d}t \quad (6-81)$$

将线性时变系统输出调节器设计方法和线性定常系统状态调节器设计方法移植过来,可建立线性定常系统输出调节器设计方法,即：

(1) 检验系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 的能观测性。

(2) 确定动态输出误差加权矩阵 \mathbf{Q} 、动态控制加权矩阵 \mathbf{R} 。

(3) 求解黎卡提代数方程:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} = 0 \quad (6-82)$$

(4) 求解调节器系统状态方程:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (6-83)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (6-84)$$

(5) 求最优控制:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (6-85)$$

(6) 求最小目标泛函值:

$$J^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \quad (6-86)$$

(7) 求输出量:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

(8) 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 并重新计算,直到满意为止。

实现输出调节器设计计算的 MATLAB 应用程序列于表 6.1。前已指出,该程序兼有实现状态调节器设计与输出调节器设计双重功能,对于输出调节器,开关量选 s1o2=2。

【例 6.3】 试为例 6.2 系统设计一个输出调节器。

解 (1) 系统能观测性

能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2$, 故系统状态能观测。

(2) 选择加权系数

预选动态输出误差加权系数 $Q=5$, 动态控制加权系数 $R=1$ 。

(3) 解黎卡提矩阵方程

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} = 0$$

将各系数矩阵代入上式,经计算可得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{11} & 6 + \sqrt{11} \\ 6 + \sqrt{11} & 9 + 4\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

(4) 求状态反馈矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [1 + \sqrt{11} \quad 6 + \sqrt{11}]$$

(5) 求最优控制

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

(6) 最小目标泛函值

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = 38.4$$

(7) 输出调节器系统结构图

输出调节器系统结构如图 6.7 所示。

(8) MATLAB 辅助计算

在 MATLAB 命令窗口 Command Window 输入各系数矩阵和调节器选择开关量 s1o2=2 并

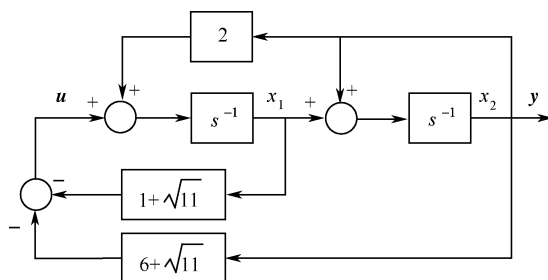


图 6.7 输出调节器系统结构图

调用表 6.1 程序函数进行计算, 所得输出量随时间变化的曲线如图 6.8 所示。从图可以看出, 当 $t=4$ 时系统输出即接近于 0, 表明调节过程快速有效。

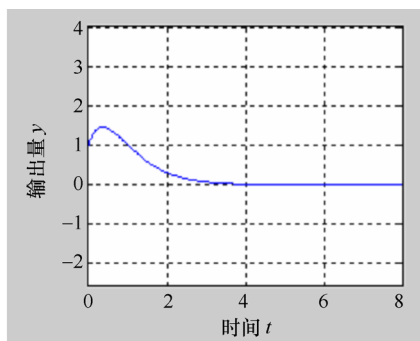


图 6.8 输出量变化曲线

另外, MATLAB 辅助计算还同时给出了 $A-BK = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{11} & -4-\sqrt{11} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值 $\lambda_{1,2} = -1.6583 \pm 0.5j$, 表明输出调节器把原来不稳定的系统变为稳定系统。限于篇幅, 具体 MATLAB 人机交互计算过程与数据不再列出。

6.3.4 输出跟踪器及其 MATLAB 辅助设计

最优跟踪问题的控制目标是使实际输出 $y(t)$ 快速跟踪理想输出 $y_d(t)$ 。

1. 线性时变系统输出跟踪器

(1) 数学模型

线性时变系统跟踪问题的数学描述如下:

给定线性时变系统动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}\end{aligned}$$

又给定终端输出误差加权矩阵 \mathbf{Q}_f 和动态输出误差加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 、动态控制加权矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 及理想输出 $y_d(t)$ 和初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 求在有限时区 $t \in [t_0, t_f]$ 使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (6-87a)$$

取得最小值的控制, 以使实际输出 $y(t)$ 尽可能逼近理想输出 $y_d(t)$ 。式中, $\mathbf{e}(t) = y_d(t) - y(t)$ 为 q 维动态输出误差向量; \mathbf{u} 为 p 维输入向量。

(2) 输出跟踪器设计原理

将 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t)$ 和输出方程代入上式, 得

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{y}_d(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)]^T \mathbf{Q}_f [\mathbf{y}_d(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ [\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}] + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \} dt \quad (6-87b)$$

这是一个始端给定、终端时间给定的最优控制问题。应用 6.2 节变分法的计算公式并依次向下代入, 可得:

哈密尔顿函数

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = \frac{1}{2} [(\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x})^T \mathbf{Q}(t) (\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}]] \quad (6-88)$$

控制方程

$$\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u} + \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (6-89)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda} \quad (6-90)$$

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda} \quad (6-91)$$

伴随方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{x} + \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda} \quad (6-92)$$

横截条件

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \{ [\mathbf{y}_d(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)]^T \mathbf{Q}_f [\mathbf{y}_d(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)] \} \\ &= \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{y}_d(t_f) \end{aligned} \quad (6-93)$$

当系统能观测时, 仿照前面有限时间状态调节器的分析方法并根据横截条件的形式, 令

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P}(t) \mathbf{x} - \mathbf{g}(t) \quad (6-94)$$

将上式分别代入式(6-90)和式(6-91), 得

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{g}(t) \quad (6-95)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{g}(t) \quad (6-96)$$

于是, 一旦 $\mathbf{P}(t)$ 和 $\mathbf{g}(t)$ 确定, 所有问题便迎刃而解。为此下面转而研究 $\mathbf{P}(t)$ 和 $\mathbf{g}(t)$ 。

对式(6-94)两边求导数并将式(6-96)、式(6-92)和式(6-94)代入, 再合并同类项, 得

$$\begin{aligned} \text{左边} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= -[\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x} + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{g}(t) + \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}_d(t) \\ &= \text{右边} = \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{g}}(t) = [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{g}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t) \end{aligned} \quad (6-97)$$

在 $t \in [t_0, t_f]$ 内, 对任何状态和理想输出, 上式都应成立, 而这只有当等式两边同类函数项相等时才成立, 即

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) \quad (6-98)$$

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = [\mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) - \mathbf{A}^T(t)] \mathbf{g}(t) - \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}_d(t) \quad (6-99)$$

再来研究以上两微分方程的定解条件。

由式(6-94)和横截条件式(6-93),得

$$\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) - g(t_f) = C^T(t_f)Q_f C(t_f)x(t_f) - C^T(t_f)Q_f y_d(t_f)$$

在 $t=t_f$, 对任何状态和理想输出, 上式都应成立, 因此可得

$$P(t_f) = C^T(t_f)Q_f C(t_f) \quad (6-100)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)Q_f y_d(t_f) \quad (6-101)$$

根据以上两组方程, 可确定 $P(t)$ 和 $g(t)$, 进而可得

$$\text{状态反馈矩阵} \quad K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$$\text{最优控制} \quad u = -K(t)x + R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$$

$$\text{状态方程} \quad \dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$$

由以上公式确定的最优跟踪器的结构如图 6.9 所示。由该图可以看出, 跟踪器系统的参考输入是理想输出 $y_d(t)$ 。

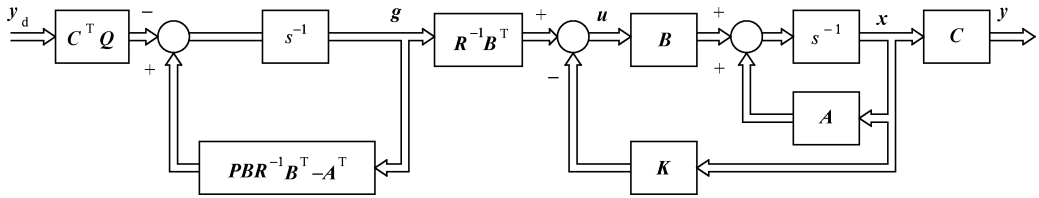


图 6.9 最优跟踪器系统结构图

把输出跟踪器与输出调节器两种系统进行比较, 可以看出二者的黎卡提矩阵微分方程相同, 状态反馈矩阵表达式相同, 均为 $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$, 系统矩阵表达式相同, 均为 $A(t) - B(t)K(t)$, 系统特征值相同。这些均与理想输出 $y_d(t)$ 无关, 只与系统的系数矩阵和加权矩阵 Q_f 、 $Q(t)$ 及 $R(t)$ 有关。二者的区别仅在于跟踪器比调节器附加了一项输入外作用 $R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$, 而 $g(t)$ 与 $y_d(t)$ 有关。

由式(6-99)和图 6.9 可以看出, 函数向量 $g(t)$ 自身构成了一个子反馈模块, 其输入为 $y_d(t)$ 。在解出黎卡提矩阵微分方程后, 一旦给定 $y_d(t)$, $g(t)$ 是唯一确定的。

(3) 设计步骤

① 检验系统 $\sum(A(t), C(t))$ 的能观测性。

② 确定加权矩阵 Q_f 、 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 。

③ 求解黎卡提矩阵微分方程:

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - C^T(t)Q(t)C(t)$$

$$P(t_f) = C^T(t_f)Q_f C(t_f)$$

④ 求解 $g(t)$ 子模块微分方程:

$$\dot{g}(t) = [P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) - C^T(t)Q(t)y_d(t)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)Q_f y_d(t_f)$$

⑤ 求解跟踪器系统状态方程:

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$$

⑥ 求最优控制:

$$u = -K(t)x + R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$$

⑦ 计算输出量:

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

⑧ 求动态输出误差和终端输出误差值:

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{y}_d(t)-\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{e}(t_f)=\mathbf{y}_d(t_f)-\mathbf{y}(t_f)$$

⑨ 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q} 、 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 并重新计算,直到满意为止。

2. 线性定常系统输出跟踪器

对于线性定常系统,其动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

最优跟踪问题的目标泛函为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\}dt \quad (6-102)$$

式中, \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 为对称正定常数加权矩阵。

如果理想输出是常数向量 \mathbf{y}_d 且终端时间 t_f 足够大,根据线性时变系统输出跟踪器建构方法并仿照线性定常系统调节器的设计方法,可建立线性定常系统跟踪器的设计方法,即:

(1) 检验系统 $\sum(\mathbf{A},\mathbf{C})$ 的能观测性。

(2) 确定加权矩阵 \mathbf{Q},\mathbf{R} 和理想输出 \mathbf{y}_d 。

(3) 求解黎卡提代数方程:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}+\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}=0 \quad (6-103)$$

(4) 求解 $\mathbf{g}(t)$ 子模块微分方程:

因当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{g}(t)=\text{const}$, $\dot{\mathbf{g}}(t)=0$, 故 $\mathbf{g}(t)$ 子模块微分方程的近似解为

$$\mathbf{g} \approx (\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}_d \quad (6-104)$$

(5) 求解跟踪器系统状态方程:

$$\mathbf{K}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (6-105)$$

$$\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{g} \quad (6-106)$$

(6) 求最优控制:

$$\mathbf{u}=-\mathbf{K}\mathbf{x}+\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{g} \quad (6-107)$$

(7) 求输出量:

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

(8) 求动态输出误差和终端输出误差:

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{y}_d-\mathbf{y}(t) \quad (6-108)$$

$$\mathbf{e}(t_f)=\mathbf{y}_d-\mathbf{y}(t_f) \quad (6-109)$$

(9) 对计算结果进行评价,若不满意,重选 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 并重新计算,直到满意为止。

运用 MATLAB 实现线性定常系统跟踪器设计计算的一个通用程序列于表 6.3。该程序定义的函数名为 LQ_track,其形参有系数矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 和加权矩阵 \mathbf{R},\mathbf{Q} 以及初始状态向量 \mathbf{x}_{t0} 、时间区间 t_0,t_f 和理想输出 \mathbf{y}_{dt} 等。

在命令窗口 Command Window 输入各系数矩阵和其他参数并调用该程序,MATLAB 即进入计算并输出最优控制、状态变量和输出误差的表达式以及终端输出误差值 \mathbf{e}_f 、状态反馈矩阵 \mathbf{K} 、黎卡提方程的矩阵 \mathbf{P} 和跟踪系统的特征值 \mathbf{E} 等,并绘制出输出量和输出误差随时间变

化的曲线。

表 6.3 实现输出跟踪器设计计算的 MATLAB 通用程序

```

D:\matlab\bin\LQ_track.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [u, x, e, ef, K, P, E] =LQ_track( A, B, C, R, Q, xt0, t0, tf, ydt)
2 % A, B, C, D分别为系数矩阵;xt0为初始状态向量,u为最优控制,x为最优轨线
3 % R为正定加权阵, Q为正定加权阵,K为状态反馈阵,P为黎氏方程矩阵
4 % t0和tf为时间区间,ydt为理想输出,e为瞬态输出误差,ef为终态输出误差
5 - syms t;
6 - Qy=C'*Q*C;
7 - [K,P,E]=lqr(A,B,Qy,R); %求黎卡提方程矩阵P,状态反馈阵K及特征值E
8 - gt=inv(P*B*inv(R)*B'-A')*C'*Q*ydt; % g(t)子模块的解
9 - AK=A-B*K; % 跟踪器状态反馈系统矩阵
10 - Phit=expm(AK*t); %状态转移矩阵
11 - x=simplify(Phit*xt0+B*inv(R)*B'*gt); %最优轨线
12 - u=simplify(-K*x+inv(R)*B'*gt); %最优控制
13 - y=simplify(C*x); %输出响应
14 - e=ydt-y; %输出误差
15 - ef=subs(e,t,tf); %终端输出误差
16 - q=size(C,1);
17 - for k=1:q
18 - subplot(2,2,k);ezplot(t,y(k),[t0,tf],1);grid:title(' ')
19 - xlabel('时间 t ');ylabel('输出量 y')
20 - end
21 - for k=1:q
22 - subplot(2,2,k);ezplot(t,e(k),[t0,tf],2);
23 - grid:title(' ');xlabel('时间 t ');ylabel('输出误差 e ')
24 - end
25 - end

```

【例 6.4】 假设系统的动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

若初始状态 $x(0) = [10 \ 10]^T$, 理想输出 $y_d = 10$, 试设计一个输出跟踪器系统, 使目标泛

函 $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{e^T Q e + u^T R u\} dt$ 取得最小值。

解 (1) 检验系统 $\sum(A, C)$ 的能观测性

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(M_o) = 2$, 故系统状态能观测。

(2) 选择加权矩阵

预选输出误差加权系数 $Q = 1$, 控制加权系数 $R = 0.78$ 。

(3) MATLAB 辅助计算

在 MATLAB 命令窗口 Command Window 输入各系数矩阵和其他参数并调用表 6.3 程

序进行计算, 所得计算结果如表 6.4 所示, 输出量和输出误差随时间变化的曲线分别如图 6.10 和图 6.11 所示。

表 6.4 实现跟踪器设计计算的 MATLAB 人机交互过程和数据

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A=[0 1;-3 -4];b=[1:1];C=[1 0];xt0=[10;10];t0=0;tf=8; ydt=10;R=0.78;Q=1;
>> [u,x,e,ef,K,P,E] =LQ_track( A, b, C, R, Q, xt0, t0, tf, ydt)

u =

9253412013152265756200985668395/10141204801825835211973625643008 - (190909731

x =

(10*cos((31076781029554817188200298815847^(1/2)*t)/9007199254740992))/exp((2
(10*cos((31076781029554817188200298815847^(1/2)*t)/9007199254740992))/exp((2

e =

- (10*cos((31076781029554817188200298815847^(1/2)*t)/9007199254740992))/exp((

ef =

-0.0049

K =

0.7667 0.1421

P =

0.5078 0.0903
0.0903 0.0206

```

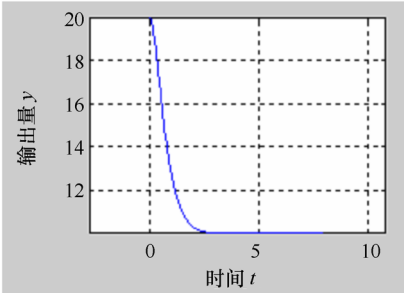


图 6.10 输出量变化曲线图

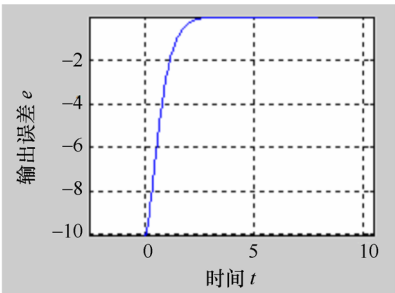


图 6.11 输出误差变化曲线图

从图 6.11 可以看出, 输出误差很快接近于 0, 由表 6.4 知, 终端输出误差为 -0.0049 。

由表 6.4 知, 跟踪器系统的状态反馈矩阵为 $\mathbf{K}=[0.7667 \quad 0.1421]$, 黎卡提矩阵方程的解

为 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.5078 & 0.0903 \\ 0.0903 & 0.0206 \end{bmatrix}$ 。

另外, MATLAB 程序计算还给出了跟踪器系统的特征值 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2.4544 + 0.6189j \\ -2.4544 - 0.6189j \end{bmatrix}$, 只因受计算机屏幕限制, 无法在同一屏中显示, 故表 6.4 未截取到。

6.4 极小值原理

前面的分析都是在泛函古典变分法的基础之上展开的, 对控制 \mathbf{u} 没有任何限制, 其变分 $\delta \mathbf{u}$ 是任意的, 从而推导出控制方程 $\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] / \partial \mathbf{u} = 0$ 。在许多实际最优控制问题中, 控制 \mathbf{u} 只能在等式和不等式约束所围的某个区域取值, 亦即必须满足

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \geq 0$$

在这种情况下, $\delta \mathbf{u}$ 不再是任意的, 因而 $\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] / \partial \mathbf{u} = 0$ 不成立。

针对控制 \mathbf{u} 受限制的泛函极值问题, 前苏联数学家庞特里亚金 (Понтрягин) 于 1956 年创立了极大值原理。该原理发展了古典变分法, 建立了在约束条件下的控制方程。因极大值与极小值只相差一个负号, 把极大值问题的目标泛函冠以负号, 就是极小值问题, 因此极大值原理又名极小值原理。

6.4.1 连续系统的极小值原理

假设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-110)$$

控制约束为

$$\{\mathbf{u} \in \Omega \mid \mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \geq 0\} \quad (6-111)$$

始端时间 t_0 和状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 给定, 终端约束为

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \xi_2(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \vdots \\ \xi_\eta(\mathbf{x}(t_f), t_f) \end{bmatrix} = 0 \quad (6-112)$$

目标泛函为

$$J[\mathbf{u}] = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt \quad (6-113)$$

则 $J[\mathbf{u}]$ 取得极小值的最优控制 \mathbf{u}^* 及其对应的最优轨线 \mathbf{x}^* 和协态向量 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 必须满足下列条件:

哈密尔顿函数为

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-114)$$

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-115)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t]}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-116)$$

$$\text{控制方程} \quad H[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*, t] = \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \lambda^*, t] \quad (6-117)$$

横截条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \xi^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} \quad (6-118)$$

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \frac{\partial \xi^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} \boldsymbol{\eta} + H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f] = 0 \quad (6-119)$$

边界条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-120)$$

$$\xi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (6-121)$$

以上便是极小值原理,下面对该原理作如下说明。

(1) 把以上公式与基于变分法的拉格朗日乘子法计算公式相比较,显而易见,二者的差别仅在于控制方程。

(2) 由控制方程(6-117)可知,最优控制是在 $\mathbf{u} \in \Omega$ 内使哈密尔顿函数 $H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t]$ 取得最小值的控制。

(3) 与拉格朗日乘子法的结论一样,当终端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 给定时,式(6-118)不存在而同时边界条件式(6-121)变为 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 。当终端时间 t_f 给定时,式(6-119)不存在。

(4) 与拉格朗日乘子法的结论一样,极小值原理给出的只是目标泛函取得极值的必要条件,而不是充分必要条件。满足该原理的目标泛函值究竟是不是最小值,应当根据问题的性质来判断或根据数学论证来确认。不过,由于最优控制问题性质使然,一般来说它就是最小值。

6.4.2 Bang-Bang 开关控制

有这样一类最短时间控制问题,其最优控制 \mathbf{u}^* 只取其约束边界值,系统工作时 \mathbf{u}^* 在其上下两边界值之间来回切换,这种切换在工程上是通过继电器来实现的,伴随着切换,继电器发出 Bang-Bang 响声,故将这类控制称为 Bang-Bang 开关控制。

Bang-Bang 控制问题的数学描述如下:

假设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

求把系统状态从 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 转移到目标终态 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 的最优控制 \mathbf{u} ,使

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f \rightarrow \min \quad (6-122)$$

s. t.

$$\{\mathbf{u} \in \Omega \mid -1 \leq u_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, p)\} \quad (6-123)$$

1. 控制原理

Bang-Bang 控制问题是一个控制受约束的最短时间问题,其哈密尔顿函数为

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda] = 1 + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = 1 + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \lambda + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \lambda \quad (6-124)$$

正则方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6-125)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \lambda \quad (6-126)$$

根据极小值原理,最优控制是在满足约束的条件下哈密尔顿函数取最小值的控制。观察式(6-124),使哈密尔顿函数取最小值的控制应为

$$\mathbf{u} = -\text{SGN}(\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}) \quad (6-127)$$

或

$$u_i = -\text{sgn}(b_i^T \boldsymbol{\lambda}) \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (6-128)$$

式中

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_p]$$

sgn 是符号函数,其定义如下:

$$\text{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1 & (\alpha > 0) \\ 0 & (\alpha = 0) \\ -1 & (\alpha < 0) \end{cases} \quad (6-129)$$

SGN 是用于向量的符号函数。

可见,最优控制 \mathbf{u} 总是取其边界值。究竟是取上边界还是下边界,完全取决于 $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}$ 的正负号。因此,只要确定了协态向量 $\boldsymbol{\lambda}$,那么 \mathbf{u} 随即确定。

由式(6-126)可得

$$\boldsymbol{\lambda} = e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\lambda}_0 \quad (6-130)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda}_0$ 为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的初值。

下面不加证明地给出最短时间控制的相关定理。

【定义】 在整个时间区间上,若不存在 $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$ 的时间区间,那么这样的极值问题称为平凡问题或非奇异问题。若存在 $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$ 的时间区间,那么这样的极值问题称为奇异问题或非平凡问题,相应的时间区间称为奇异区间。

(1) 最短时间控制存在定理

若线性定常系统 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 状态完全能控且 \mathbf{A} 的特征值均非负或实部非负,则最短时间控制一定存在。

(2) 最短时间控制的唯一性定理

对于平凡问题,若最短时间控制存在,则它必定是唯一的。

(3) 开关切换次数定理

对于平凡问题,如果最短时间控制存在且 \mathbf{A} 的特征值均为实数,那么把系统从任意初始状态 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 转移到目标终态 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 的控制一定是 Bang-Bang 控制、并且各控制分量在 ± 1 两边界值之间切换的次数最多不超过 $n-1$ 次。

2. 双积分系统的 Bang-Bang 控制

双积分系统如图 6.14 所示,其状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

下面来分析在约束 $-1 \leq u \leq 1$ 条件下把给定初始状态 $\mathbf{x}(0) = [x_{10} \quad x_{20}]^T$ 转移到目标终态 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 且使

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f \rightarrow \min$$

的控制。

(1) 最优控制基本形式

哈密顿函数为

$$H[\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}] = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \quad (6-131)$$

协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (6-132)$$

协态方程的解为

$$\lambda_1 = \lambda_{10} = \text{const} \quad (6-133)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20} \quad (6-134)$$

使哈密顿函数取最小值的控制为

$$u = -\text{sgn}(\lambda_2) \quad (6-135)$$

在以时间为横坐标、以 λ_2 和 u 为纵坐标的直角坐标系中, λ_2 和 u 之间的关系如图 6.12 所示。

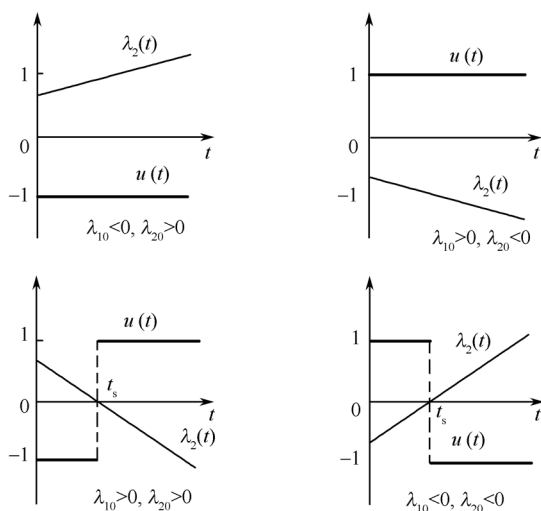


图 6.12 λ_2 与 u 之间的对应关系

从图 6.12 容易看出,可能的最优控制序列有以下 4 种:

- ① 当 $\lambda_{10} < 0, \lambda_{20} > 0$ 时, $u = -1$
- ② 当 $\lambda_{10} > 0, \lambda_{20} < 0$ 时, $u = +1$
- ③ 当 $\lambda_{10} > 0, \lambda_{20} > 0$ 时, $u = -1 \rightarrow +1$
- ④ 当 $\lambda_{10} < 0, \lambda_{20} < 0$ 时, $u = +1 \rightarrow -1$

前两种情况, u 取定值, 不需切换。后两种情况, u 需要切换一次, 切换时间满足

$$\lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20} = 0$$

$$t_s = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \quad (6-136)$$

(2) 状态轨线及开关曲线

① $u = +1$ 的状态轨线

当 $u = +1$ 时, 状态方程的解为

$$x_2 = t + x_{20} \quad (6-137)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (6-138)$$

从以上两式中消去时间 t , 得

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (6-139)$$

在 x_1-x_2 平面上, 对于固定的某个初始状态点 $\mathbf{x}(0) = [x_{10} \ x_{20}]^T$, 由式(6-139)确定的状态轨线是一条开口向右的抛物线。初始状态点 $\mathbf{x}(0)$ 不同, 对应的抛物线位置不同, 如图 6.13 实线所示。根据式(6-137), x_2 随时间的增大而增长, 因此, 状态轨线自下而上变化, 如图中箭头所示。

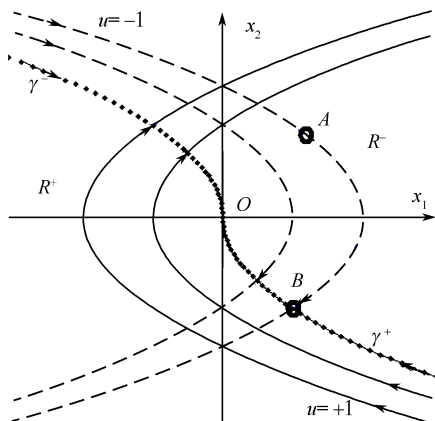


图 6.13 \mathbf{x} 与 u 之间的对应关系及开关曲线

② $u = -1$ 的状态轨线

当 $u = -1$ 时, 状态方程的解为

$$x_2 = -t + x_{20} \quad (6-140)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (6-141)$$

从以上两式中消去时间 t , 得

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (6-142)$$

在 x_1-x_2 平面上, 由上式确定的状态轨线是开口向左的抛物线。初始状态点 $\mathbf{x}(0)$ 不同, 对应的抛物线位置不同, 如图 6.13 虚线所示。根据式(6-140), 因 x_2 随时间的增大而减小, 因此, 状态轨线自上而下变化。

③ 通过原点的状态轨线

当 $u = +1, x_{10} = \frac{1}{2}x_{20}^2$ 时, 状态轨线通过原点, 其方程为

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 (u = +1, x_2 \leq 0) \quad (6-143)$$

当 $u = -1, x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2$ 时, 状态轨线通过原点, 其方程为

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 (u = -1, x_2 \geq 0) \quad (6-144)$$

由以上两式确定的状态轨线是通过平面原点的两个半支抛物线,如图 6.13 中的粗点实线和粗点虚线所示。将 $u=+1$ 对应的半支抛物线记为 γ^+ 、 $u=-1$ 对应的半支抛物线记为 γ^- , γ^+ 和 γ^- 合起来就形成了整条状态轨线 $\gamma=\lambda^-\cup\lambda^+$,其方程为

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 |x_2| \quad (6-145)$$

或

$$h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 |x_2| = 0 \quad (6-146)$$

轨线 $\gamma=\lambda^-\cup\lambda^+$ 称为开关曲线,它把整个状态平面分成了左右两个区域 R^- 和 R^+ ,如图 6.13 所示。

位于开关线 γ 左侧 R^+ 区域的状态点都满足

$$h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 |x_2| < 0 \quad (6-147)$$

位于 γ 右侧 R^- 区域的状态点都满足

$$h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 |x_2| > 0 \quad (6-148)$$

(3) 基于状态的最优控制

以上分析,根据 u 可能的取值确定了状态可能的变化。沿该路线进行逆向分析,就可以根据状态可能的位置来确定所需的控制 u 。

从上面分析和图 6.13 可以看出,当初始状态点 $\mathbf{x}(0)=[x_{10} \ x_{20}]^T$ 位于 γ^+ 上时,只用 $u=+1$ 就可将 $\mathbf{x}(0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_f)=0$ 。同样,当 $\mathbf{x}(0)$ 位于 γ^- 上时,只用 $u=-1$ 就可将 $\mathbf{x}(0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_f)=0$ 。当 $\mathbf{x}(0)$ 位于 R^+ 内时,从 $\mathbf{x}(0)$ 到 $\mathbf{x}(t_f)=0$ 须分两步转移,先取 $u=+1$,待状态转移到 γ^- 上时立即切换成 $u=-1$ 。当 $\mathbf{x}(0)$ 位于 R^- 内时,也须分两步转移,先取 $u=-1$,待转移到 γ^+ 上时立即切换成 $u=+1$ 。

综上所述,可得如下结论:

- ① 点 $\mathbf{x}(0)$ 位于 γ^+ , $h(x_1, x_2)=0$: $u=+1$
- ② 点 $\mathbf{x}(0)$ 位于 R^+ , $h(x_1, x_2)<0$: $u=+1 \rightarrow u=-1$
- ③ 点 $\mathbf{x}(0)$ 位于 γ^- , $h(x_1, x_2)=0$: $u=-1$
- ④ 点 $\mathbf{x}(0)$ 位于 R^- , $h(x_1, x_2)>0$: $u=-1 \rightarrow u=+1$

将以上结论用数学式表示,可得

$$u = \begin{cases} +1, h(x_1, x_2) \leq 0 \\ -1, h(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases} \quad (6-149)$$

于是可得

$$u = -\operatorname{sgn}[h(x_1, x_2)] \quad (6-150)$$

(4) 最短控制时间

- ① $\mathbf{x}(0)=[x_{10} \ x_{20}]^T$ 位于 γ 的情况

当 $\mathbf{x}(0)$ 位于 γ^+ 时, $x_{20} < 0$, 欲使 $\mathbf{x}(t_f)=0$, 只须取 $u=+1$ 。由式(6-137)可得

$$\begin{aligned} x_2(t_f) &= t_f + x_{20} = 0 \\ t_f &= -x_{20} \end{aligned} \quad (6-151)$$

同理可推得,当 $\mathbf{x}(0)$ 位于 γ^- 时

$$t_f = x_{20} \quad (6-152)$$

以上两式可合并写为

$$t_f = |x_{20}| \quad (6-153)$$

② $\mathbf{x}(0) = [x_{10} \ x_{20}]^T$ 位于 R^- 的情况

参见图 6.13, 假设 $\mathbf{x}(0)$ 位于 R^- 区域的点 A , 从点 A 到状态空间原点 O , 须分两步转移。第一步, 用 $u = -1$ 将状态点从 A 转移到 γ^+ 线上 B 点; 第二步, 将控制切换为 $u = +1$, 用 $u = +1$ 将状态转移到坐标原点 O 。

假设从 A 到 B 所用时间为 t_1 , 则点 B 的坐标为 $\mathbf{x}(t_1) = [x_1(t_1) \ x_2(t_1)]^T$ 。因点 B 是抛物线 AB 与 γ^+ 线的交点, 故由式(6-140)、式(6-142)和式(6-143), 可得

$$x_2(t_1) = -t_1 + x_{20}$$

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}x_2^2(t_1) + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2$$

$$x_1(t_1) = \frac{1}{2}x_2^2(t_1)$$

联立以上 3 式并解方程, 可得

$$x_2(t_1) = -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} \quad (6-154)$$

$$t_1 = x_{20} + \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} \quad (6-155)$$

再来求从 B 点 $\mathbf{x}(t_1) = [x_1(t_1) \ x_2(t_1)]^T$ 用控制 $u = +1$ 将状态沿 γ^+ 转移到 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 所用时间。假设此过程所用时间为 t_2 , 则由式(6-151)可知

$$t_2 = -x_2(t_1) = \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} \quad (6-156)$$

两步转移, 总计用时为

$$t_f = t_1 + t_2 = x_{20} + \sqrt{2x_{20}^2 + 4x_{10}} \quad (6-157)$$

③ $\mathbf{x}(0) = [x_{10} \ x_{20}]^T$ 位于 R^+ 的情况

用同上一样的分析方法, 可推得

$$t_f = -x_{20} + \sqrt{2x_{20}^2 - 4x_{10}} \quad (6-158)$$

将式(6-153)、式(6-157)和式(6-158)合并起来, 得

$$t_f = \begin{cases} |x_{20}| & \mathbf{x}(0) \in \gamma \\ x_{20} + \sqrt{2x_{20}^2 + 4x_{10}} & \mathbf{x}(0) \in R^- \\ -x_{20} + \sqrt{2x_{20}^2 - 4x_{10}} & \mathbf{x}(0) \in R^+ \end{cases} \quad (6-159)$$

(5) 最优控制律的工程实现

根据式(6-146)和式(6-150), 上述控制律可用产生 $\frac{1}{2}x_2|x_2|$ 的非线性元件 N 、比较器、反相器和继电器 R 来实现, 如图 6.14 所示。这种继电器系统的优点是最优控制通过状态反馈来实现, 缺点是其控制过程不完全符合控制原理, 切换次数一般超过 $n-1$ 次。不过从工程应用来说, 它能满足控制要求。

当状态位于 R^+ 或 R^- 时, $h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| \neq 0$, 因而 $u \neq 0$, 系统就运动, 当状态被转移到 γ 上时, $h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| = 0$ 。从理论上讲, 这时继电器因输入为 0 而停止

切换动作。但实际的继电器总会有运动惯性,这种惯性使继电器延迟切换,实际切换时间会越过 $h(x_1, x_2)=0$ 的理论切换时间点 t_s ,从而可避免状态驻留在 γ 上。但另一方面,这必将导致实际切换次数超过 1 次。特别当状态接近原点时,继电器有可能会频繁切换。不过最终总能将状态转移到原点附近。

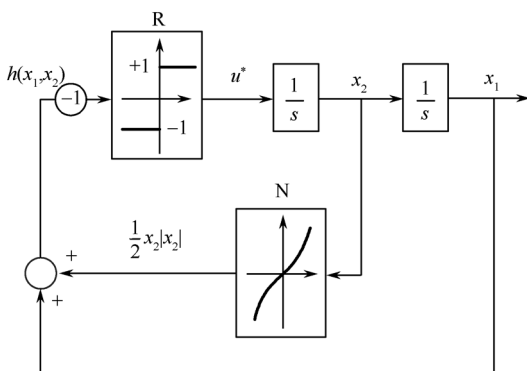


图 6.14 最短时间控制系统结构图

6.5 离散系统的最优控制

6.5.1 控制无约束的离散系统的最优控制

1. 数学模型

假设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (6-160)$$

求最优控制序列 $\mathbf{u}(k) (k=0, 1, \dots, N-1)$, 使目标泛函最小化, 即

$$J[\mathbf{u}(k)] = \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \rightarrow \min \quad (6-161)$$

s. t.

$$\xi(\mathbf{x}(N), N) = \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}(N), N) \\ \xi_2(\mathbf{x}(N), N) \\ \vdots \\ \xi_\gamma(\mathbf{x}(N), N) \end{bmatrix} = 0 \quad (6-162)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

这是一个始端给定, 终端步数 N 给定, 终端状态 $\mathbf{x}(N)$ 受约束的最优控制问题。

2. 拉格朗日乘法

仿照求解连续系统最优控制的拉格朗日乘法, 可推得求解离散系统最优控制的计算式, 即:

哈密顿函数

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), k] = L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1) \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (6-163)$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), k]}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (6-164)$$

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (6-165)$$

$$\text{协态方程} \quad \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), k]}{\partial \mathbf{x}(k)} \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (6-166)$$

$$\text{横截条件} \quad \boldsymbol{\lambda}(N) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(N), N)}{\partial \mathbf{x}(N)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(N), N)}{\partial \mathbf{x}(N)} \boldsymbol{\eta} \quad (6-167)$$

$$\begin{aligned} \text{边界条件} \quad & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ & \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(N), N) = 0 \end{aligned}$$

式中, $\boldsymbol{\eta}$ 是与 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(N), N) = 0$ 同维的待定常数向量。

6.5.2 控制有约束的离散系统的最优控制

在上面问题中, 若对控制施加约束

$$\{\mathbf{u}(k) \in \Omega \mid \mathbf{G}(\mathbf{u}(k), k) \geq 0\} \quad (6-168)$$

那么, 拉格朗日乘子法中的控制方程 $\frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), k]}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0$ 不再成立。根据极小值原理, 控制方程应为

$$H[\mathbf{x}^*(k), \mathbf{u}^*(k), \boldsymbol{\lambda}^*(k+1), k] = \min_{\mathbf{u}(k) \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}^*(k+1), k] \quad (6-169)$$

上式表明, 最优控制是在 $\mathbf{u}(k) \in \Omega$ 内使哈密顿函数 $H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), k]$ 取得最小值的控制。这与连续系统最优控制的定义完全相同。

除了控制方程不同外, 极小值原理其他公式与拉格朗日乘子法公式完全相同, 不再重复列举。

【例 6.5】 假设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

求把系统状态从 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 4]^T$ 转移到某个终态且使目标泛函

$$J = \frac{1}{2}x_2^2(3) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 u^2(k)$$

取得最小值的控制序列 $\mathbf{u}(k) (k=0, 1, 2)$ 。

解 令

$$\theta(\mathbf{x}(3)) = \frac{1}{2}x_2^2(3)$$

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2}u^2(k)$$

哈密顿函数

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)] &= \frac{1}{2}u^2(k) + [\lambda_1(k+1)\lambda_2(k+1)] \begin{bmatrix} 0.5x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ 0.5x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda_1(k+1)[0.5x_1(k) + 0.1x_2(k)] \\ &\quad + \lambda_2(k+1)[0.5x_2(k) + u(k)] \end{aligned}$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda_2(k+1) = 0 \quad (\text{E1a})$$

$$u(k) = -\lambda_2(k+1) \quad (k=0, 1, 2) \quad (\text{E1b})$$

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ 0.5x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ 0.5x_2(k) - \lambda_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (\text{E2})$$

$$\text{协态方程} \quad \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), u(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial \mathbf{x}(k)} = \begin{bmatrix} 0.5\lambda_1(k+1) \\ 0.1\lambda_1(k+1) + 0.5\lambda_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (\text{E3})$$

$$(k=1, 2)$$

$$\text{横截条件} \quad \boldsymbol{\lambda}(3) = \frac{\partial \theta[\mathbf{x}(3)]}{\partial \mathbf{x}(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

$$\text{边界条件} \quad \mathbf{x}(0) = [1 \quad 4]^T$$

(1) 解协态方程

$$\boldsymbol{\lambda}(1) = \begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5\lambda_1(2) \\ 0.1\lambda_1(2) + 0.5\lambda_2(2) \end{bmatrix} \quad (\text{E5})$$

$$\boldsymbol{\lambda}(2) = \begin{bmatrix} \lambda_1(2) \\ \lambda_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5\lambda_1(3) \\ 0.1\lambda_1(3) + 0.5\lambda_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E6})$$

由横截条件式(E4)得

$$\boldsymbol{\lambda}(3) = \begin{bmatrix} \lambda_1(3) \\ \lambda_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(3) \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\lambda_1(3) = 0$$

$$\lambda_2(3) = x_2(3)$$

将此二值代入式(E6)和式(E5)并进行迭代计算,得

$$\lambda_1(2) = 0.5\lambda_1(3) = 0$$

$$\lambda_2(2) = 0.1\lambda_1(3) + 0.5\lambda_2(3) = 0.5x_2(3)$$

$$\lambda_1(1) = 0.5\lambda_1(2) = 0$$

$$\lambda_2(1) = 0.1\lambda_1(2) + 0.5\lambda_2(2) = 0.25x_2(3)$$

(2) 解状态方程

将 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 4]^T$ 和已求得的协态变量代入式(E2)并进行迭代计算,得

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1(0) + 0.1x_2(0) \\ 0.5x_2(0) - \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 2 - \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 2 - 0.25x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E7})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1(1) + 0.1x_2(1) \\ 0.5x_2(1) - \lambda_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 - 0.025x_2(3) \\ 1 - 0.625x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E8})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1(2) + 0.1x_2(2) \\ 0.5x_2(2) - \lambda_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.425 - 0.075x_2(3) \\ 0.5 - 1.3125x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E9})$$

解方程式(E9),可得

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4088 \\ 0.2162 \end{bmatrix}$$

将 $\mathbf{x}(3)$ 代入式(E8)和式(E7),得

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 - 0.025x_2(3) \\ 1 - 0.625x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6446 \\ 0.8649 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 2 - 0.25x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.9459 \end{bmatrix}$$

(3) 求控制序列

将已求得的状态和协态变量代入式(E1b),得

$$u(0) = -\lambda_2(1) = -0.25x_2(3) = -0.0541$$

$$u(1) = -\lambda_2(2) = -0.5x_2(3) = -0.1081$$

$$u(2) = -\lambda_2(3) = -x_2(3) = -0.2162$$

(4) 最小目标泛函值

$$J^* = \frac{1}{2}x_2^2(3) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 u^2(k) = 0.0541$$

6.6 动态规划法

动态规划法是美国数学家贝尔曼(Bellman)于1957年创立的。该方法在另一方向发展了古典变分法,把极值变分问题归结为多级决策问题。

6.6.1 多级决策过程及最优性原理

1. 多级决策过程

从上一节离散系统的最优控制分析和例6.5可以看出,离散系统的状态是伴随着控制序列 $\mathbf{u}(k) (k=0, 1, \dots, N-1)$ 从 $\mathbf{x}(0)$ 分 N 步转移到 $\mathbf{x}(N)$ 的。从系统运动来看,第 k 步的状态 $\mathbf{x}(k)$ 只与它前一步的状态 $\mathbf{x}(k-1)$ 和控制 $\mathbf{u}(k-1)$ 有关,与更早的状态和控制无关。这一运动性质称为马尔柯夫无后效性。如果把每一步控制过程看作一个决策,那么 N 步最优控制序列问题就变成了 N 级决策问题,如图6.15所示。

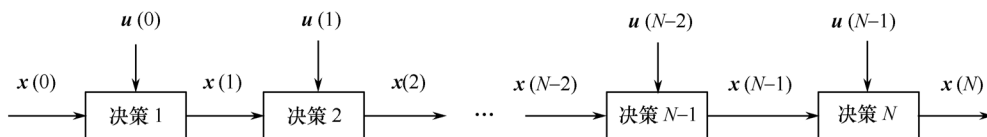


图 6.15 多级决策过程示意图

下面以最优路径问题为例,说明多级决策过程。

从 A 站到 E 站的路径如图 6.16(a)所示,从 A 站开始,每一站到下一站有两个可选路径,路径旁注数字为距离。兹来分析最短路径。

(1) 决策分级

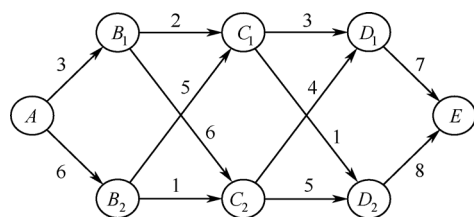
将最短路径问题视为决策问题,从 A 到 E 总共有 4 段不同路径,最短路径决策可分为 A、B、C、D 四级,即

第 1 级 $A \rightarrow B(B_1, B_2)$

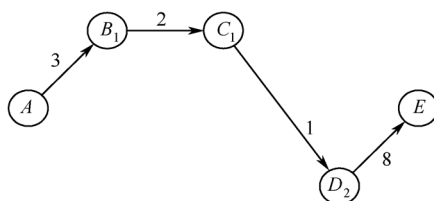
第 2 级 $B \rightarrow C(C_1, C_2)$

第 3 级 $C \rightarrow D(D_1, D_2)$

第 4 级 $D \rightarrow E$



(a) 路径图



(b) 最短路径

图 6.16 路径图

(2) 建立决策档案

假设从第 i 级 x 站出发经由 y 站到达终点站 E 的距离为 $L_i(x \rightarrow y \rightarrow E)$, 其最短距离为 $J_i(x)$, 为按最简便方式把握全局最短路径, 从最后一级 (第 4 级) 开始倒序建立路径距离档案, 即

第 4 级 $L_4(D_1 \rightarrow E) = 7$

$L_4(D_2 \rightarrow E) = 8$

第 3 级 $L_3(C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E) = 3 + 7 = 10$

$L_3(C_1 \rightarrow D_2 \rightarrow E) = 1 + 8 = 9$ $J_3(C_1) = 9$

$L_3(C_2 \rightarrow D_1 \rightarrow E) = 4 + 7 = 11$

$L_3(C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E) = 5 + 8 = 13$ $J_3(C_2) = 11$

第 2 级 $L_2(B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow E) = 2 + 9 = 11$

$L_2(B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow E) = 6 + 11 = 17$ $J_2(B_1) = 11$

$L_2(B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow E) = 5 + 9 = 14$

$L_2(B_2 \rightarrow C_2 \rightarrow E) = 1 + 11 = 12$ $J_2(B_2) = 12$

第 1 级 $L_1(A \rightarrow B_1 \rightarrow E) = 3 + 11 = 14$

$L_1(A \rightarrow B_2 \rightarrow E) = 6 + 12 = 18$ $J_1(A) = 14$

(3) 查找最短路径

按决策顺序路径查找最短路径:

第 1 级决策, 最短距离 $J_1(A) = 14$, 路径 $A \rightarrow B_1$

第 2 级决策, 最短距离 $J_2(B_1) = 11$, 路径 $B_1 \rightarrow C_1$

第 3 级决策, 最短距离 $J_3(C_1) = 9$, 路径 $C_1 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

于是可得最短路径及其最短距离, 即

$A \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

$J_1(A) = 14$

从以上最短路径决策分析过程和结果可以得出如下结论:

- ① 决策过程可分为决策分级、倒序建档和顺序查档 3 个过程;
- ② 每一级决策确定的最短路径就是全局最短路径的一部分。

2. 最优性原理

若一个 N 级决策是最优的, 那么其所有子决策也必然是最优的。一个最优控制问题可转换为 N 级决策问题, 若以 $x(0)$ 为初始状态的控制序列 $u(k) (k=0, 1, \dots, N-1)$ 是最优的, 则以 $x(k-1)$ 为初始状态的控制序列 $u(j) (j=k-1, k-2, \dots, N-1)$ 也必然是最优的。

6.6.2 离散系统的动态规划

假设系统状态方程和初始状态分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\quad (6-170)$$

现根据多级决策过程和最优性原理来研究使目标泛函

$$J[\mathbf{u}(k)] = \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (6-171)$$

取最小值的最优控制问题。显然这是一个始端给定, 终端步数 N 给定, 终端状态 $\mathbf{x}(N)$ 自由, 控制 $\mathbf{u}(k)$ 不受约束的最优控制问题。

1. 控制决策分级

因终端步数为 N , 故该最优控制问题可转化为 N 级决策问题。

第 1 级子决策为由初态 $\mathbf{x}(0)$ 向下一步状态 $\mathbf{x}(1)$ 转移的子决策, 其目标泛函为

$$\begin{aligned}J_N[\mathbf{x}(0)] &= \min_{\mathbf{u}_N} \{ \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}_N} \{ L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), 0] + \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=1}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}(0)} \{ L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), 0] + J_{N-1}[\mathbf{x}(1)] \}\end{aligned}\quad (6-172)$$

式中, $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1) \in \mathbf{U}_N$; $J_{N-1}[\mathbf{x}(1)]$ 为第 2 级子决策的目标泛函。

比较式(6-171)与式(6-172), 容易看出

$$J[\mathbf{u}(k)] = J_N[\mathbf{x}(0)] \quad (6-173)$$

第 2 级子决策为从 $\mathbf{x}(1)$ 开始向 $\mathbf{x}(2)$ 转移的子决策, 其目标泛函为

$$\begin{aligned}J_{N-1}[\mathbf{x}(1)] &= \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \{ \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=1}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \{ L[\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1), 1] + \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=2}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}(1)} \{ L[\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1), 1] + J_{N-2}[\mathbf{x}(2)] \}\end{aligned}\quad (6-174)$$

式中, $\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(N-1) \in \mathbf{U}_{N-1}$;

$J_{N-2}[\mathbf{x}(2)]$ 为第 3 级子决策的目标泛函。

⋮

第 N 级子决策为从 $\mathbf{x}(N-1)$ 向 $\mathbf{x}(N)$ 转移的子决策, 其目标泛函为

$$J_1[\mathbf{x}(N-1)] = \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ L[\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1), N-1] + \theta(\mathbf{x}(N), N) \} \quad (6-175)$$

一般地, 第 i 级子决策可表示为以 $\mathbf{x}(i-1)$ 为初态向 $\mathbf{x}(i)$ 进行状态转移的子决策, 其目标泛函可表示为

$$\begin{aligned}J_{N-(i-1)}[\mathbf{x}(i-1)] &= \min_{\mathbf{u}_{N-(i-1)}} \{ \theta(\mathbf{x}(N), N) + \sum_{k=i-1}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}(i-1)} \{ L[\mathbf{x}(i-1), \mathbf{u}(i-1), i-1] + J_{N-i}[\mathbf{x}(i)] \} \quad (i = 1, 2, \dots, N)\end{aligned}\quad (6-176)$$

式中, $\mathbf{u}(i-1), \mathbf{u}(i), \dots, \mathbf{u}(N-1) \in \mathbf{U}_{N-(i-1)}$ 。

在以上控制决策分级中,所有目标泛函都表示成以状态为宗量的泛函。原因是 $\mathbf{u}(k)$ 和 $\mathbf{x}(k)$ 之间存在关系,差不多所有最优控制都可由状态反馈来实现。

另外,从以上分级推导过程可以看出,每一级子决策包含有从前一级开始直到最后一级子决策的全部控制和状态信息。因此,由每一级子决策确定的控制必定也是全局最优控制的一部分。

2. 建档迭代计算

首先,根据各级子决策目标泛函和状态方程从最后一级(第 N 级)子决策开始直到第 1 级子决策为止按倒序依次进行最小化迭代计算,建立各级子决策的控制序列 $\mathbf{u}(k)$ 与状态序列 $\mathbf{x}(k)$ 之间的关系。具体迭代过程如图 6.17 所示。

接着根据边界条件确定第一步控制 $\mathbf{u}(0)$ 。

3. 查档迭代计算

根据建档过程建立的各级子决策的控制序列 $\mathbf{u}(k)$ 与状态序列 $\mathbf{x}(k)$ 间的关系、从第 1 级子决策开始直到最后一级子决策为止按顺序依次进行迭代计算,从而确定全部控制序列与状态序列。具体迭代过程如图 6.17 所示。

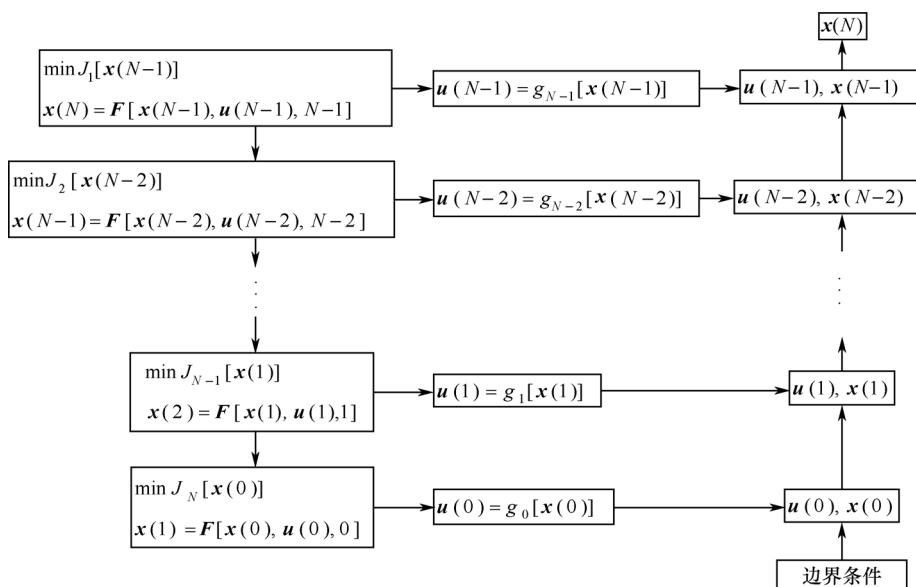


图 6.17 动态规划法技术路线图

【例 6.6】应用动态规划法求解例 6.5 最优控制问题。

解

$$\theta(\mathbf{x}(3)) = \frac{1}{2}x_2^2(3)$$

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2}u^2(k)$$

(1) 决策分级和倒序建档迭代计算

根据给定目标泛函,终端步数 $N=3$,该最优控制问题可划分为 3 级决策问题。为简化运算步骤,现将决策分级和倒序建档同步进行。

第 3 级状态转移决策的目标泛函为

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \min_{u(2)} \{L[\mathbf{x}(2), u(2)] + \theta(\mathbf{x}(3))\} = \min_{u(2)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(2) + \frac{1}{2} x_2^2(3) \right\} \quad (\text{E1a})$$

由状态方程求出 $x_2(3)$ 并代入上式, 可得

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \min_{u(2)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(2) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x_2(2) + u(2) \right]^2 \right\} \quad (\text{E1b})$$

欲使上式取最小值, 须使

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1[\mathbf{x}(2)]}{\partial u(2)} &= \frac{1}{2} x_2(2) + 2u(2) = 0 \\ u(2) &= -\frac{1}{4} x_2(2) \end{aligned} \quad (\text{E2})$$

再将上式代入式(E1b), 得

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \frac{1}{16} x_2^2(2) \quad (\text{E3})$$

第2级状态转移决策的目标泛函为

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \min_{u(1)} \{L[\mathbf{x}(1), u(1)] + J_1[\mathbf{x}(2)]\} = \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(1) + \frac{1}{16} x_2^2(2) \right\} \quad (\text{E4a})$$

由状态方程求出 $x_2(2)$ 并代入上式, 可得

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(1) + \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2} x_2(1) + u(1) \right]^2 \right\} \quad (\text{E4b})$$

上式取最小值的条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2[\mathbf{x}(1)]}{\partial u(1)} &= \frac{9}{8} u(1) + \frac{1}{16} x_2(1) = 0 \\ u(1) &= -\frac{1}{18} x_2(1) \end{aligned} \quad (\text{E5})$$

再将上式代入式(E4b), 得

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \frac{1}{72} x_2^2(1) \quad (\text{E6})$$

第1级状态转移子决策的目标泛函为

$$J_3[\mathbf{x}(0)] = \min_{u(0)} \{L[\mathbf{x}(0), u(0)] + J_2[\mathbf{x}(1)]\} = \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(0) + \frac{1}{72} x_2^2(1) \right\} \quad (\text{E7a})$$

由状态方程求出 $x_2(1)$ 并代入上式, 可得

$$J_3[\mathbf{x}(0)] = \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(0) + \frac{1}{72} \left[\frac{1}{2} x_2(0) + u(0) \right]^2 \right\} \quad (\text{E7b})$$

上式取最小值的条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_3[\mathbf{x}(0)]}{\partial u(0)} &= u(0) + \frac{1}{36} \left[\frac{1}{2} x_2(0) + u(0) \right] = 0 \\ u(0) &= -\frac{1}{74} x_2(0) \end{aligned} \quad (\text{E8})$$

由给定的初始条件 $x_2(0) = 4$, 可得

$$u(0) = -\frac{4}{74} = -0.0541$$

(2) 顺序查档迭代计算

将 $u(0) = -1$ 代入状态方程, 得

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.9459 \end{bmatrix}$$

依次向上进行迭代计算,得

$$u(1) = -\frac{1}{18}x_2(1) = -0.1081$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.9459 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1081 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6446 \\ 0.8649 \end{bmatrix}$$

$$u(2) = -\frac{1}{4}x_2(2) = -0.2162$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{b}u(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6446 \\ 0.8649 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2162 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4088 \\ 0.2162 \end{bmatrix}$$

最优控制目标泛函值为

$$J^* = J_3[\mathbf{x}(0)] = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{72}x_2^2(1) = 0.0541$$

把本例和例 6.5 计算结果进行比较,显然,二者殊途同归。

动态规划法既适用于求解控制无约束的最优控制问题,也适用于求解控制有约束的最优控制问题。在例 6.6 中,因控制无约束,所以每一级决策的最小化条件是目标泛函关于控制的偏导数等于 0。对于控制有约束的问题,上面的求解过程也是成立的,只不过每一级决策的最小化条件不再是目标泛函关于控制的偏导数等于 0,必须根据约束条件应用极小值原理进行具体分析。

6.6.3 连续系统的动态规划

假设系统的状态方程、目标泛函、初始状态及终端条件分别为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \\ J[\mathbf{x}, t] &= \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \{ \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt \} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \xi(\mathbf{x}(t_f), t_f) &= \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \xi_2(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ \vdots \\ \xi_\eta(\mathbf{x}(t_f), t_f) \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

根据最优性原理来研究该最优控制问题。

假设从初始时刻 t_0 到终端时刻 t_f 的控制是最优的, t 为 $[t_0, t_f]$ 区间中的一个内点,则根据最优性原理,从 t 到 t_f 这一段控制必定也是最优的。由 t 到 t_f 的控制过程可分为 $t \rightarrow t + \Delta t$ 和 $t + \Delta t \rightarrow t_f$ 两段控制过程,其最优目标泛函为

$$\begin{aligned} J^*[\mathbf{x}, t] &= \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \{ \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt \} \\ &= \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt + J^*[\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t] \right\} \end{aligned} \quad (6-177)$$

式中, $J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t]$ 为从 $t+\Delta t$ 至 t_f 这一段控制过程的目标泛函, 即

$$J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t] = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt \quad (6-178)$$

根据最优性原理, $t+\Delta t$ 至 t_f 这一段控制也必定是最优的。

将 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 进行泰勒展开并取一次近似, 再将状态方程代入, 可得

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) \approx \mathbf{x} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \quad (6-179)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t \quad (6-180)$$

$$J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t] = J^*[\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t] \quad (6-181)$$

对上式进行泰勒展开并取一次近似, 再将状态方程代入, 可得

$$\begin{aligned} J^*[\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t] &\approx J^*[\mathbf{x}, t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} \Delta t \\ &= J^*[\mathbf{x}, t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} \Delta t \end{aligned} \quad (6-182)$$

将上式代入式 (6-177), 得

$$J^*[\mathbf{x}, t] = \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt + J^*[\mathbf{x}, t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} \Delta t \right\} \quad (6-183)$$

在上式中, 因 $J^*[\mathbf{x}, t]$ 和 $\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t}$ 都与 \mathbf{u} 无关, 故可将这两项从等式右边的最小化计算式中移出, 再消去等式两边的 $J^*[\mathbf{x}, t]$, 得

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} \Delta t = - \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t \right\} \quad (6-184)$$

当 Δt 很小时, 由积分中值定理可得

$$\int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] dt \approx L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] \Delta t \quad (6-185)$$

将上式代入式 (6-184) 并消去公因子 Δt , 可得

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} = - \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \{ L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \} \quad (6-186)$$

上式是连续系统动态规划的基本方程, 称为贝尔曼方程。该方程是一个关于 $J^*[\mathbf{x}, t]$ 的偏微分方程。解此方程, 可确定最优控制, 其中的系数由边界条件和横截条件确定。

下面论证横截条件和协态方程。

如下选取哈密尔顿函数和协态向量

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-187)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-188)$$

于是, 贝尔曼方程 (6-186) 可化为

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} = - \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] \quad (6-189)$$

如果 \mathbf{u} 无约束限制, 由上式可得

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} = - \min_{\mathbf{u}} H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] \quad (6-190)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (6-191)$$

式中

$$\frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_p} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_p} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

从式(6-189)(当 \mathbf{u} 无约束时用式(6-191))求出最优控制 \mathbf{u} 的表达式并代入贝尔曼方程, 可得

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t} + L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (6-192)$$

上式称为哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, 是一个偏微分方程。根据此方程可推导出协态方程。

对上式关于 \mathbf{x} 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (6-193)$$

对 $\frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}}$ 关于时间求导数, 得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x} \partial t} = \frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial^2 J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial t \partial \mathbf{x}} \quad (6-194)$$

将上式代入式(6-193), 得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (6-195)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (6-196)$$

因 $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}}$, $H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, 故上式可化为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = - \left(\frac{\partial L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} \right) = - \frac{\partial H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-197)$$

这便是协态方程。

再来论证横截条件。

在终点 $t = t_f$ 处, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$, 终端性能泛函可表示为

$$J^*[\mathbf{x}(t_f), t_f] = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f) \boldsymbol{\eta} \quad (6-198)$$

式中, $\boldsymbol{\eta}$ 为与 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ 同维的待定常数向量。

对上式关于 $\mathbf{x}(t_f)$ 求偏导数, 得

$$\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} \quad (6-199)$$

因 $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial J^*[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}}$, 故上式可化为

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\eta} \quad (6-200)$$

同理,对式(6-198)关于 t_f 求偏导数,并考虑到式(6-192)、式(6-187)、式(6-188)和式(6-199),可得

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial t_f} \boldsymbol{\eta} + H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] = 0 \quad (6-201)$$

以上两式便是横截条件。当终端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 给定时,式(6-200)不存在。当终端时间 t_f 给定时,式(6-201)也不存在。

动态规划法的原理与极小值原理是一致的。除了控制方程采用贝尔曼方程以外,其他计算公式均与极小值原理计算公式一致。

当目标泛函是拉格朗日型且终端状态无约束时,应用动态规划法求解最优控制问题,无须建立协态方程和横截条件,只通过求解哈密顿-雅可比-贝尔曼偏微分方程即可。这一点比变分法和极小值原理简单。

【例 6.7】 假设系统的状态方程和初始状态分别为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = [0 \quad 10]^T$$

试求最优控制,使目标泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + u^2) dt$$

取得最小值。

解 本例目标泛函为拉格朗日型。

(1) 最优控制

贝尔曼方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J[\mathbf{x}]}{\partial t} &= -\min_u \{ L[\mathbf{x}, u] + \frac{\partial J[\mathbf{x}]}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{F}(\mathbf{x}, u) \} \\ &= -\min_u \left\{ \frac{1}{2} (x_1^2 + u^2) + \frac{\partial J}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial J}{\partial x_2} u \right\} \end{aligned} \quad (E1)$$

因 u 无约束限制,故上式右边取极小值的条件为

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{2} (x_1^2 + u^2) + \frac{\partial J}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial J}{\partial x_2} u \right\} = u + \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0 \quad (E2a)$$

$$u = -\frac{\partial J}{\partial x_2} \quad (E2b)$$

将上式代入式(E1),可得哈密顿-雅可比-贝尔曼方程,即

$$\frac{\partial J[\mathbf{x}]}{\partial t} = -\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial J}{\partial x_1} x_2 \quad (E3)$$

因系统状态方程和目标泛函均不显含时间 t ,故 $\frac{\partial J[\mathbf{x}]}{\partial t} = 0$,因而可得

$$-\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial J}{\partial x_1} x_2 = 0 \quad (E4)$$

这是一个关于状态变量的偏微分方程,假设其解为

$$J = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 \quad (E5)$$

将上式代入式(E4),得

$$-\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (2bx_2 + cx_1)^2 - (2ax_1 + cx_2)x_2 = 0 \quad (E6a)$$

$$\frac{1}{2}(c^2-1)x_1^2+(2b^2-c)x_2^2+2(bc-a)x_1x_2=0 \quad (\text{E6b})$$

因状态变量互相独立,故上式成立的条件是

$$c^2-1=0 \quad (\text{E7})$$

$$2b^2-c=0 \quad (\text{E8})$$

$$bc-a=0 \quad (\text{E9})$$

联立以上三式,解方程,可得

$$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=1 \\ a=-\frac{\sqrt{2}}{2}, b=-\frac{\sqrt{2}}{2}, c=1 \end{cases} \quad (\text{E10})$$

计算表明,当取 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}, b=-\frac{\sqrt{2}}{2}, c=1$ 时,系统不稳定,故取 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=1$ 。于是可得

$$J=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2^2+x_1x_2 \quad (\text{E11})$$

$$u=-\frac{\partial J}{\partial x_2}=-x_1-\sqrt{2}x_2 \quad (\text{E12})$$

最优控制系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1-\sqrt{2}x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} \quad (\text{E13})$$

因 $\bar{\mathbf{A}}$ 的特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm j)$, 所以最优控制系统是稳定的。

(2) 解集

① 最优控制

$$u=-x_1-\sqrt{2}x_2$$

② 状态向量

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 10\sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \\ 10e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最优轨线如图 6.18 所示。

③ 最小目标泛函值

$$J^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + u^2) dt = 50\sqrt{2}$$

④ 最优控制系统结构图

最优控制系统结构如图 6.19 所示。

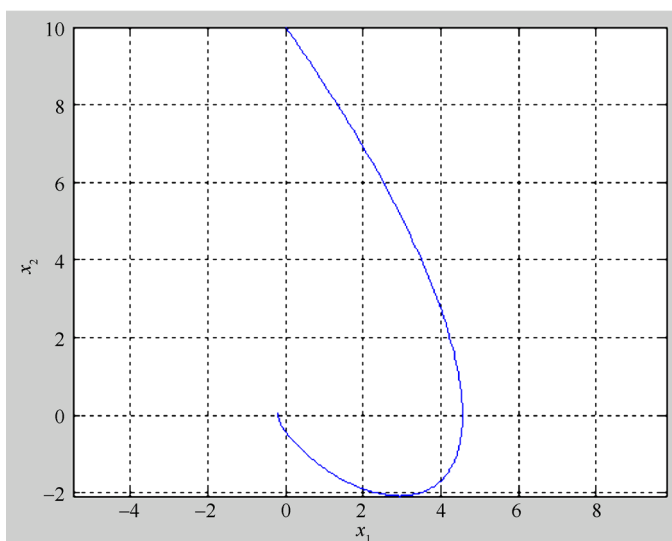


图 6.18 最优轨线

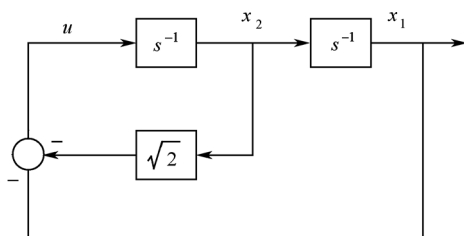


图 6.19 最优控制系统结构图

习 题 6

6-1 假设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求把系统状态从 $\mathbf{x}(0)=0$ 转移到边界 $x_1(2)+2x_2(2)=1$ 上且使目标泛函

$$J(u) = [x_1(2) + x_2(2)]^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt$$

取得最小值的控制。

6-2 假设系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = x_2$$

试以 $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + u^T \mathbf{Ru}) dt$ 为最小化目标设计一个无限时间状态调节器系统, 旨在把系统从初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1]^T$ 快速转移到平衡状态。

6-3 试为题 6-2 系统设计一个输出调节器。

6-4 假设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

求把系统状态从 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ 转移到 $\mathbf{x}(2) = 0$ 且使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k)$$

取得最小值的控制序列 $\mathbf{u}(k) (k=0, 1)$ 。

6-5 假设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试应用变分法(或极小值原理)求把系统状态从 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 4]^T$ 转移到某个终态且使目标泛函

$$J = \frac{1}{2} x_2^2(3) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 u^2(k)$$

取得最小值的控制序列 $\mathbf{u}(k) (k=0, 1, 2)$ 。

6-6 试应用动态规划法求解题 6-5。

附录 A 习题参考答案

第 1 章

1-1 解 串联弹簧等效刚度系数为

$$K = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

以系统静平衡位置为坐标 y 和 z 的原点

$$M \ddot{z} + f(\dot{z} - \dot{y}) + Kz = p(t) \quad (\text{E1})$$

$$f(\dot{z} - \dot{y}) = k_3 y \quad (\text{E2})$$

令

$$x_1 = z \quad (\text{E3})$$

$$x_2 = \dot{z} \quad (\text{E4})$$

$$x_3 = y \quad (\text{E5})$$

由式(E3)和式(E4)可得

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \quad (\text{E6})$$

由式(E2)、式(E4)和式(E5)可得

$$\dot{x}_3 = \dot{y} = x_2 - \frac{k_3}{f} x_3 \quad (\text{E7})$$

由式(E4)、式(E1)和式(E7)可得

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = -\frac{f}{M}(\dot{z} - \dot{y}) - \frac{K}{M}z + \frac{1}{M}p(t) = -\frac{k_3}{M}x_3 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}p(t) \quad (\text{E8})$$

于是,系统状态空间模型的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{M} & 0 & -\frac{k_3}{M} \\ 0 & 1 & -\frac{k_3}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} p(t)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1-2 解 由基尔霍夫定理得

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + v_1 = u_i \text{ (回路电压)} \quad (\text{E1})$$

$$i_1 = i_2 + C_2 \frac{dv_2}{dt} + C_1 \frac{dv_1}{dt} \text{ (节点电流)} \quad (\text{E2})$$

$$i_2 + C_2 \frac{dv_2}{dt} = C_3 \frac{du_o}{dt} \text{ (节点电流)} \quad (\text{E3})$$

$$v_2 + u_o = v_1 \text{ (回路电压)} \quad (\text{E4})$$

$$L \frac{di_2}{dt} = v_2 \text{ (回路电压)} \quad (\text{E5})$$

设

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

由式(E1)可得

$$\dot{x}_1 = \frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L}i_1 - \frac{1}{L}v_1 + \frac{1}{L}u_i = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_4 + \frac{1}{L}u_i \quad (\text{E6})$$

由式(E5)可得

$$\dot{x}_2 = \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L}v_2 = \frac{1}{L}x_3 \quad (\text{E7})$$

由式(E2)~式(E4)可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = \frac{dv_2}{dt} &= \frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}i_1 - \frac{C_1 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}i_2 \\ &= \frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}x_1 - \frac{C_1 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}x_2 \end{aligned} \quad (\text{E8})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \frac{dv_1}{dt} &= \frac{C_2 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}i_1 - \frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}i_2 \\ &= \frac{C_2 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}x_1 - \frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}x_2 \end{aligned} \quad (\text{E9})$$

系统状态方程的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} & -\frac{C_1 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} & 0 & 0 \\ \frac{C_2 + C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} & -\frac{C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

由式(E4)直接可得输出方程,即

$$u_o = v_1 - v_2 = -x_3 + x_4 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]\mathbf{x}$$

1-3 解 (1)能观测规范 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$$

能观测规范 II 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -6 \\ -65 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\mathbf{x}$$

(2) 能观测规范 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -15 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} + 2u$$

能观测规范 II 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} + 2u$$

(3) 仿照线性定常系统能观测规范 I 型状态空间模型的建立方法, 如下选取状态变量

$$x_1 = y \quad (\text{E1})$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u \quad (\text{E2})$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u \quad (\text{E3})$$

式中, β_0 和 β_1 为待定时变系数。

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_0 u \quad (\text{E4})$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_1 u \quad (\text{E5})$$

为求 x_3 的一阶导数, 从式(E1)开始, 依次向下进行迭代, 可得

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u = \dot{y} - \beta_0 u \quad (\text{E6})$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u = \dot{\dot{y}} - \dot{\beta}_0 u - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \quad (\text{E7})$$

对上式求一阶导数, 可得

$$\dot{x}_3 = y^{(3)} - \dot{\beta}_0 u - 2\dot{\beta}_0 \dot{u} - \beta_0 \ddot{u} - \dot{\beta}_1 u - \beta_1 \dot{u} \quad (\text{E8})$$

由给定微分方程可得

$$y^{(3)} = -t \ddot{y} - 3\dot{y} - 2e^{-3t}y + 5\dot{u} + 8\ddot{u} + u \quad (\text{E9})$$

从式(E6)和(E7)求出 \dot{y} 和 \ddot{y} 且将其与式(E9)一并代入式(E8), 经化简可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -t(x_3 + \dot{\beta}_0 u + \beta_0 \dot{u} + \beta_1 u) - 3(x_2 + \beta_0 u) - 2e^{-3t}x_1 + 5\dot{u} + 8\ddot{u} + u \\ &\quad - \dot{\beta}_0 u - 2\dot{\beta}_0 \dot{u} - \beta_0 \ddot{u} - \dot{\beta}_1 u - \beta_1 \dot{u} \\ &= -2e^{-3t}x_1 - 3x_2 - tx_3 + (5 - \beta_0)\dot{u} + (8 - t\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 - \beta_1)\ddot{u} \\ &\quad + (1 - t\dot{\beta}_0 - t\beta_1 - 3\beta_0 - \dot{\beta}_0 - \dot{\beta}_1)u \end{aligned}$$

为使状态方程不含输入量的导数项, 令

$$\beta_0 = 5$$

$$\beta_1 = 8 - t\beta_0 - 2\dot{\beta}_0 = 8 - 5t$$

再引入系数

$$\beta_2 = 1 - t\dot{\beta}_0 - t\beta_1 - 3\beta_0 - \dot{\beta}_0 - \dot{\beta}_1 = 5t^2 - 8t - 9$$

可得

$$\dot{x}_3 = -2e^{-3t}x_1 - 3x_2 - tx_3 + \beta_2 u \quad (\text{E10})$$

系统状态方程的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)u$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2e^{-3t} & -3 & -t \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8-5t \\ 5t^2-8t-9 \end{bmatrix}$$

输出方程为

$$\mathbf{y} = x_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中, $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$ 。

(4) 设

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \ddot{y} \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= y^{(3)} = -3y\dot{y} - 4y\ddot{y} - y^2 + 8yu = -3x_1x_3 - 4x_1x_2 - x_1^2 + 8x_1u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

1-4 解 (1) $W(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{15s^2 + 45s - 150}{s^4 + 10s^3 + 36s^2 + 54s + 27}$

(a) 能控规范 I 型及约当规范型

能控规范 I 型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & -54 & -36 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [-150 \ 45 \ 15 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

约当规范型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{27} \\ 0 \\ -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} u \\ y &= \left[-\frac{1215}{2} \ 675 \ 765 \ \frac{915}{2} \right] \mathbf{z} \end{aligned}$$

(b) 能控规范 II 型及约当规范型

能控规范 II 型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -27 \\ 1 & 0 & 0 & -54 \\ 0 & 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 15 \ -105 \ 360] \mathbf{x} \end{aligned}$$

约当规范型

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{45}{2} & 75 & 60 & \frac{45}{2} \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

$$(2) W(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{s^4 + s^3 - 16s^2 + 20s}{s^4 + 13s^3 + 57s^2 + 99s + 54}$$

(a) 能控规范 I 型及约当规范型

能控规范 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -54 & -99 & -57 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 20 & -16 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

约当规范型

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{54} \\ -\frac{1}{54} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{64}{5} & \frac{486}{5} & -150 & -90 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

(b) 能控规范 II 型及约当规范型

能控规范 II 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -54 \\ 1 & 0 & 0 & -99 \\ 0 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 83 & -474 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

约当规范型

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{64}{45} & \frac{9}{5} & -\frac{25}{3} & -\frac{20}{9} \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

1-5 解 (1)由图 1.14 可得

$$Y(s) = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 5} (X_1(s) + U_2(s))$$

$$Y(s)(s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 5) = X_1(s) + U_2(s)$$

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} + \dot{y} + 2\dot{y} + 5y = x_1 + u_2$$

令

$$x_2 = y, x_3 = \dot{y}, x_4 = \dot{y}, x_5 = y^{(3)}$$

可得

$$\dot{x}_2 = \dot{y} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y} = x_4$$

$$\dot{x}_4 = y^{(3)} = x_5$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = y^{(4)} &= -3y^{(3)} - \dot{y} - 2\dot{y} - 5y + x_1 + u_2 \\ &= -3x_5 - x_4 - 2x_3 - 5x_2 + x_1 + u_2 \end{aligned}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2} [U_1(s) - (2s^3 + 5s^2 + 3s + 1)Y(s)]$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u_1 - 2x_5 - 5x_4 - 3x_3 - x_2$$

系统状态空间模型的向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(2) 由结构图 1.15 可得

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} [X_1(s) + X_2(s) + a_2 U(s)]$$

$$Y(s)[s^2 + s + 1] = X_1(s) + X_2(s) + a_2 U(s)$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = x_1 + x_2 + a_2 u$$

令

$$x_4 = y, x_3 = \dot{y}$$

可得

$$\dot{x}_4 = \dot{y} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y} = -\dot{y} - y + x_1 + x_2 + a_2 u = -x_3 - x_4 + x_1 + x_2 + a_2 u$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s + a_3} N(s)$$

$$\dot{x}_2 = -a_3 x_2 + n$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s + a_1} [U(s) - X_4(s)]$$

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + u - x_4$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix}$$

$$y = x_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

(3) 将系统结构图 1.16 等效变换为图 A1.1, 并如图所示在积分环节和一次项倒数环节输出端定义一个状态变量, 可得

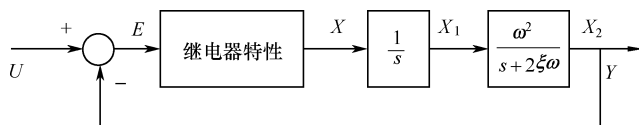


图 A1.1 等效结构图

$$Y(s) = X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

$$X_2(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s} X_1(s)$$

对以上两式去分母后进行拉氏逆变换, 可得

$$\dot{x}_1 = x$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 x_1 - 2\xi\omega x_2$$

写成向量形式, 得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

输出方程为

$$y = x_2$$

根据图 1.16(a), 继电器特性元件的输入为 e 、输出为 x 。根据图 1.16(b), x 的表达式为

$$x = \begin{cases} 0 & \{(-ma < e < ma) \cup [(ma < e < a) \cap (\dot{e} > 0)] \cup [(-a < e < -ma) \cap (\dot{e} < 0)]\} \\ b & \{(e > a) \cup [(ma \leq e \leq a) \cap (\dot{e} < 0)]\} \\ -b & \{(e < -a) \cup [(-a \leq e \leq -ma) \cap (\dot{e} > 0)]\} \end{cases}$$

其中, $e = u - x_2$ 。

1-6 解 (1) 能观测规范 I 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -34 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -6 \\ 28 \\ -148 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(k) + u(k)$$

能观测规范 II 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & -34 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -44 \\ -38 \\ -6 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}(k) + u(k)$$

(2) 能观测规范 I 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -96 & -160 & -78 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -14 \\ 102 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

能观测规范 II 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -96 \\ 1 & 0 & 0 & -160 \\ 0 & 1 & 0 & -78 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 8.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}(k)$$

1-7 解

$$W(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{10z^3 + 90z^2 + 240z + 200}{z^4 + 13z^3 + 57z^2 + 99z + 54}$$

能控规范 I 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -54 & -99 & -57 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [200 \quad 240 \quad 90 \quad 10] \mathbf{x}(k)$$

能控规范 II 型

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -54 \\ 1 & 0 & 0 & -99 \\ 0 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [10 \quad -40 \quad 190 \quad -980] \mathbf{x}(k)$$

第 2 章

2-1 解 按照矩阵指数函数条件 $\dot{\Phi}(t) = \Phi(t)A$, 容易验证:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \text{ 是 } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ 的矩阵指数函数。}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - te^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & te^{-t} + e^{-t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \text{ 是 } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ 的矩阵指数函数。}$$

2-2 解

$$(1) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \text{ 不满足状态转移矩阵的初值条件, 故不是状态转移矩阵。}$$

(2) 因 $\Phi(0) = I$, 故 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$ 有可能是状态转移矩阵。

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-t} - 4e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - e^{-t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

令 $A = \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

因 A 满足 $\dot{\Phi}(t) = \Phi(t)A$, 故 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$ 是 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ 的状态转移矩阵。

(3) $\Phi(t, t_0) = I$, 故 $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix}$ 有可能是状态转移矩阵。

令 $A(t) = \dot{\Phi}(t, t_0) \Big|_{t_0=t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因 $A(t)$ 满足 $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, 故 $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix}$ 是 $A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的状态转

移矩阵。

2-3 解 (1) $x(0) = [1 \ 5]^T$

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} - e^{-5t} \\ -5e^{-t} + 5e^{-5t} & -e^{-t} + 5e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{5}{8}e^{-t} - \frac{13}{8}e^{-5t} - \frac{5}{2}te^{-3t} + 2 \\ -\frac{5}{8}[e^{-t} + (4-12t)e^{-3t} - 13e^{-5t}] \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x(t)$$

(2) $x(5) = [2 \ 2]^T$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}e^{-t}(4e^5 + 55e^{-10}) - \frac{5}{2}te^{-3t} + \frac{1}{8}e^{-5t}(45e^{10} - 4e^{25}) + 2 \\ -\frac{1}{8}[(55e^{-10} + 4e^5)e^{-t} + 20(1-3t)e^{-3t} + (225e^{-10} - 20e^{25})e^{-5t}] \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x(t)$$

2-4 解

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{103}{2704} - \frac{9}{52}t \right) e^{-4t} - \frac{1}{169} e^{-2t} [17 \cos(3t) - 7 \sin(3t)] + \frac{1}{16} \\ -\frac{9}{52} e^{-4t} - \frac{1}{13} e^{-2t} [\cos(3t) - 5 \sin(3t)] + \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{15} e^{-3t} - \frac{1}{5} e^{-2t} [\cos(3t) - 2 \sin(3t)] + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{103}{2704} - \frac{9}{52}t \right) e^{-4t} - \frac{2}{15} e^{-3t} + \frac{1}{845} e^{-2t} [373 \sin(3t) - 254 \cos(3t)] + \frac{19}{48}$$

2-5 解 系统矩阵 $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 显然 $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$, 因此状态转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^3 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \ln \frac{t}{t_0} & 0 \\ 0 & t - t_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \left(\ln \frac{t}{t_0} \right)^2 & 0 \\ 0 & (t - t_0)^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} \left(\ln \frac{t}{t_0} \right)^3 & 0 \\ 0 & (t - t_0)^3 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} e^{\ln \frac{t}{t_0}} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

受控运动分量为

$$\mathbf{x}_u = \int_1^t \Phi(t, \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = 2 \int_1^t \begin{bmatrix} \frac{t}{\tau} & 0 \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -2t \ln t \\ -2 + 2e^{t-1} \end{bmatrix}$$

自由运动分量为

$$\mathbf{x}_{x0} = \Phi(t, 1) \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 2t \\ 5e^{t-1} \end{bmatrix}$$

系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{x0} + \mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} 2t(1 - \ln t) \\ -2 + 7e^{t-1} \end{bmatrix}$$

系统的输出响应为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = 2t(1 - \ln t)$$

2-6 解 因系统矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 + e^{-2t} & 0 \\ 1 & -2 + e^{-2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) \neq \mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$, 故状态转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &\approx \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & 0 \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \\ \phi_{11}(t, t_0) &= 2(-t + t_0) + \frac{1}{2}(-e^{-2t} + e^{-2t_0}) + \frac{1}{8}[4(t - t_0) + e^{-2t} - e^{-2t_0}]^2 + 1 \\ \phi_{21}(t, t_0) &= t - t_0 - \frac{1}{2}[(t - t_0)(4t - 4t_0 + e^{-2t} - e^{-2t_0}) \\ \phi_{22}(t, t_0) &= 2(-t + t_0) + \frac{1}{2}(-e^{-2t} + e^{-2t_0}) + \frac{1}{8}[4(t - t_0) + e^{-2t} - e^{-2t_0}]^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Phi(t, 0) \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(4t + e^{-2t} - 1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t + \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}t(4t + e^{-2t} - 3) & \frac{1}{8}(4t + e^{-2t} - 1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(4t + e^{-2t} - 1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t + \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 2t + \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{8}t\right)e^{-4t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{5}{8}\right)e^{-2t} + \frac{17}{32} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) \approx \frac{1}{8}(4t + e^{-2t} - 1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t + \frac{3}{2}$$

2-7 解

$$k = 0 \sim 5$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 16.5 & -3.7398 & 4.1697 & 9.3455 \\ 5 & 16.5 & -3.7398 & 4.1697 & 9.3455 & 2.3107 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k)$$

2-8 解

$$k=2 \sim 7$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1.000 & 8.1537 & 10.5787 & 10.7868 & 10.0730 & 9.0486 \\ 5.000 & 12.0300 & 17.9192 & 23.0843 & 27.6076 & 31.5511 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1.8647 & 15.9014 & 20.9636 & 21.5009 & 20.1211 & 18.0890 \\ 5.0916 & 12.0598 & 17.9252 & 23.0854 & 27.6077 & 31.5511 \end{bmatrix}$$

2-9 解 (1)系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 0.4493 & 0.0899 & 0 \\ 0 & 0.4493 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5488 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^* = \int_0^T \Phi(t) \mathbf{b} dt = \begin{bmatrix} 0.012 \\ 0.1377 \\ 0.752 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4493 & 0.0899 & 0 \\ 0 & 0.4493 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5488 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.012 \\ 0.1377 \\ 0.752 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [2 \quad 0 \quad 4] \mathbf{x}(k)$$

(2)

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \approx \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2(t - t_0) + 2(t - t_0)^2 & 0 \\ 0 & 1 - 2(t - t_0) - (e^{-t} - e^{-t_0}) + \frac{1}{2}[2(t - t_0) + (e^{-t} - e^{-t_0})]^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(k) = \Phi[(k+1)T, kT] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + e^{-2k} \left(\frac{1}{2} - e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2} \right) + (e^{-1} - 1)e^{-k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau] \mathbf{B}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2} - e^{-1} \right) e^{-2k} + (1 - 3e^{-1})e^{-k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

第 3 章

3-1 解 (1) 平衡状态为 $\mathbf{x}_c = 0$

取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 不恒为 0。

由 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ 。因 \mathbf{P} 正定实对称, 故该系统全局渐近稳定。

李氏 V 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{5}{12} x_1^2 + \frac{1}{12} x_2^2$$

(2) 平衡状态为 $\mathbf{x}_c = 0$

取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

由 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{33}{256} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ 。因 \mathbf{P} 非正定, 故该系统不稳定。

(3) 平衡状态为 $\mathbf{x}_c = 0$

取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k)$ 不恒为 0。

由 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ 得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{48} & -\frac{7}{2304} \\ -\frac{7}{2304} & -\frac{25}{55296} \end{bmatrix}$ 。因 \mathbf{P} 负定实对称, 故该系统不稳定。

(4) 平衡状态为 $\mathbf{x}_c = 0$

取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{由 } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \text{ 得 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & -\frac{5}{24^2} & 0 \\ -\frac{5}{24^2} & -\frac{1}{24} \left(1 + \frac{26}{24^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{48} \end{bmatrix}。 \text{因 } \mathbf{P} \text{ 负定实对称, 故该系统}$$

不稳定。

(5) 平衡状态为 $\mathbf{x}_e = 0$

取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k)$ 不恒为 0。

由 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ 得 $\mathbf{P} = \frac{1}{63} \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 100 \end{bmatrix}$ 。因 \mathbf{P} 为正定实对称阵, 故该系统全局渐近稳定。

3-2 解 平衡状态为 $\mathbf{x}_e = 0$ 且唯一。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2(3x_1^2 + 1) & 0 \\ 0 & -2(3x_2^2 + 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 的一阶主子式为负, 二阶主子式为正, 故 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 负定。根据克拉索夫斯基法, 该系统在 $\mathbf{x}_e = 0$ 处渐近稳定。李雅普诺夫 V 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x_1^3 + x_2)^2 + (x_1 - x_2^3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1^4 + x_2^4)$$

又当 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 故该系统全局渐近稳定。

3-3 解 平衡状态为 $\mathbf{x}_e = 0$ 且唯一。

假设变量梯度为

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

梯度向量的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V^2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

当 $a_{12} = a_{21} = 0, a_{11} = a_{22} = a > 0$ 时

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} = [ax_1 \quad ax_2] \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = -a[(x_1 - x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^4]$$

显然 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定。于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ V(\mathbf{x}) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 \\ &= a \left(\int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 \right) = \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

因 $V(\mathbf{x})$ 正定, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定, 且当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 所以该系统全局渐进稳定。

3-4 解 平衡状态为 $\mathbf{x}_c=0$ 且唯一。

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + bx_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2 & -2 + 6bx_2^2 \end{bmatrix}$$

当 $a < 0, b < \frac{a+1}{3ax_2^2}$ 时, $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 负定。根据克拉索夫斯基法, 该系统在 $\mathbf{x}_c=0$ 处渐近稳定。李

雅普诺夫 V 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^3)^2$$

又当 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 所以系统全局渐近稳定。

第 4 章

4-1 解 (1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad e^{-t} \quad 0]$$

① 能控性分析

$$\mathbf{b}_0(t) = \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{b}_0(t) + \frac{d\mathbf{b}_0(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -7e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{b}_1(t) + \frac{d\mathbf{b}_1(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 - e^{-2t} \\ 1 \\ 49e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_c(t) = [\mathbf{b}_0(t) \quad \mathbf{b}_1(t) \quad \mathbf{b}_2(t)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 - e^{-2t} \\ 1 & -1 & 1 \\ e^{-5t} & -7e^{-5t} & 49e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\det[\mathbf{M}_c(t)] = 6(6e^{-5t} + e^{-7t})$$

显然, 不论 t 取何值, 总有 $\text{rank}(\mathbf{M}_c(t)) = 3$ 。因此, 该系统是状态能控的。

② 能观测性分析

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C} = [1 \quad e^{-t} \quad 0]$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{C}_0}{dt} = [1 - e^{-2t} \quad 1 \quad 0]$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{C}_1}{dt} = [2e^{-2t} + (e^{-2t} - 1)^2 \quad 2 - e^{-2t} \quad 0]$$

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-2t} & 1 & 0 \\ 2e^{-2t} + (e^{-2t} - 1)^2 & 2 - e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

当 $t > 0$ 时, 因 $\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2 < 3$, 故该系统是状态不能观测的。

(2) 对偶系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = - \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1 \quad e^{-5t}]$$

4-2 解 (1)

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{rank}[\mathbf{M}_c] = 3, \text{系统状态能控。}$$

能控规范 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad -4 \quad 1] \mathbf{x} \quad \mathbf{T}_{c1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

能控规范 II 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad -1 \quad -3] \mathbf{x} \quad \mathbf{T}_{c2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -14 \end{bmatrix}, \text{rank}[\mathbf{M}_o] = 3, \text{系统状态能观测。}$$

能观测规范 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \quad \mathbf{T}_{o1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

能观测规范 II 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \quad \mathbf{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(3)

① 对偶系统

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = [1 \quad 1 \quad -2]$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = [2 \quad 1 \quad 1]$$

② 能控性与能观测性的关系

$$\mathbf{M}_{c1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{o2}^T \quad \mathbf{M}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -14 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{c2}^T$$

③ 传递函数间的关系

$$W_1(s) = \frac{s(s-4)}{(s+1)(s-2)^2} = W_2(s)$$

④ 状态转移矩阵之间的关系

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{9}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & -\frac{2}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = \Phi_2^T(t)$$

4-3 解

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 & 9 & 9 & -27 & -27 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 8 & -4 & -16 & 8 \\ 5 & -1 & -25 & 6 & 125 & -36 & -625 & 216 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 36 & 0 & -216 \end{bmatrix}, \text{rank}[\mathbf{M}_c] = 4, \text{系统状态能控。}$$

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 1 \\ 9 & 0 & 25 & -11 \\ -27 & 0 & -125 & 91 \end{bmatrix}, \text{rank}[\mathbf{M}_o] = 3 < 4, \text{系统状态不能观测。}$$

4-4 解 (1) 能控性和能观测性分析

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 54 \\ 3 & -9 & 27 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 25 & -74 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & 0 \\ 0 & 18 & 33 & 0 \\ 0 & -54 & -81 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\mu = \text{rank}(\mathbf{M}_c) = 3 < 4$, $\eta = \text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2 < 4$, 故系统状态既不完全能控也不完全能观测。

(2) 按能控结构进行规范分解

从 \mathbf{M}_c 中取线性无关前 3 列并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_c , 得

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & -9 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 25 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{19}{58} & -\frac{1}{29} & 0 & \frac{9}{58} \\ -\frac{10}{87} & -\frac{35}{261} & 0 & \frac{3}{29} \\ -\frac{13}{174} & -\frac{1}{261} & 0 & \frac{1}{58} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

按 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}$ 进行线性变换, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}u \\ y &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z} \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c \\ \mathbf{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T \\ \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 9 & \frac{43}{58} \\ 1 & 0 & -3 & \frac{100}{261} \\ 0 & 1 & -5 & \frac{43}{522} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \\ \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_c = [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_2] = [6 \quad -18 \quad 54 \mid 5] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{43}{58} \\ \frac{261}{100} \\ \frac{43}{522} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{\bar{c}} &= -3 \\ \mathbf{b}_c &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C}_c &= [6 \quad -18 \quad 54] & \mathbf{C}_2 &= 5 \end{aligned}$$

经上述线性变换后, 在 $\mu=3$ 维子空间 \mathbf{R}^3 , $\sum (\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)$ 是状态能控的, 即 $\mathbf{z}_c = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T$ 能控, 而在 $n-\mu=1$ 维子空间 \mathbf{R} , $\sum (\mathbf{A}_{\bar{c}}, 0)$ 是状态不能控的, 即 $\mathbf{z}_{\bar{c}} = z_4$ 不能控。

经能控性结构分解后, \mathbf{z} 变量空间系统的动态方程又可表示为

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c u + \mathbf{A}_{12} z_4 \quad (\text{E1})$$

$$\dot{z}_4 = -3z_4 \quad (\text{E2})$$

$$y = \mathbf{C}_c \mathbf{z}_c + 5z_4 \quad (\text{E3})$$

从式(E2)和式(E3)容易看出, 状态变量 z_4 是能观测的。

(3) 对能控子空间按能观测性进行结构分解

能控子空间的能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 54 \\ -18 & 54 & -162 \\ 54 & -162 & 486 \end{bmatrix}$$

因 $\eta_i = \text{rank}(\mathbf{M}_o) = 1$, 故只有一个状态变量能观测。

从 \mathbf{M}_o 中取第 1 行并以非奇异为准则构造 \mathbf{T}_o^{-1} , 得

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 54 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{w}_o = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$, 对式(E1)~式(E3)按 $\mathbf{z}_c = \mathbf{T}_o \mathbf{w}_o$ 和 $z_4 = w_4$ 进行线性变换, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_o &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T}_o \mathbf{w}_o + \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b}_c u + \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}_{12} w_4 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{w}_o + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{100}{261} \\ \frac{43}{522} \end{bmatrix} w_4 \end{aligned} \quad (\text{E4})$$

$$\dot{w}_4 = -3w_4 \quad (\text{E5})$$

$$y = \mathbf{C}_c \mathbf{T}_o \mathbf{w}_o + 5w_4 = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{w}_o + 5w_4 \quad (\text{E6})$$

将状态变量组合起来, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_o \\ \dot{w}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{6} & 3 & -12 & \frac{100}{261} \\ 0 & 1 & -5 & \frac{43}{522} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \mathbf{w} \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{co} \\ \mathbf{w}_{co} \\ w_{co} \end{bmatrix} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]^T$, $w_{co} = w_1$ 能控又能观测, $\mathbf{w}_{co} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ 能控但不能

观测, $w_{co} = w_4$ 不能控但能观测。

第 5 章

5-1 解 (1) 系统状态能控, 可任意配置极点。

(2) 状态反馈增益矩阵 $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [201 \quad 78 \quad 17]$ 。

状态反馈系统的结构如图 A5.1 所示。

5-2 解 (1) 稳定性分析

系统矩阵的特征值为 $s_1 = 3$ 和 $s_{2,3} = -2$, 故系统不稳定。

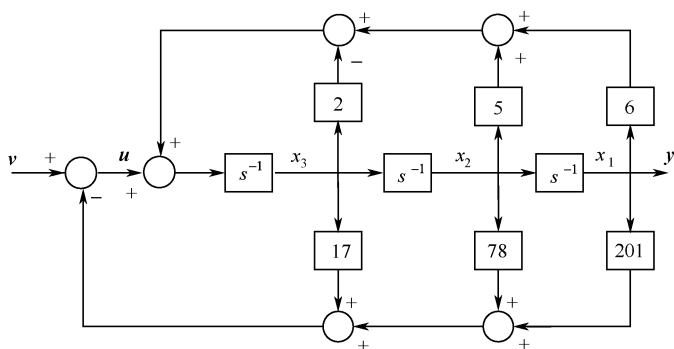


图 A5.1 状态反馈控制系统结构图

(2) 镇定分析

系统能控性矩阵为

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 2 < 3$, 系统状态不完全能控。

① 能控与不能控结构分解

令

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{z}, \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}u = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c \mathbf{z} + \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} u = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2.6 \\ 1 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

将上式分解开来, 可得

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c u = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} z_3 \quad (\text{能控子空间})$$

$$\dot{z}_3 = -2z_3 \quad (\text{不能控子空间})$$

② 子空间稳定性分析

位于能控子空间的特征值为 $s_1 = 3, s_2 = -2$; 位于不能控子空间的特征值为 $s_3 = -2$ 。因正实数特征根位于能控子空间, 故通过状态反馈可把它变为负数或实部为负的共轭复数, 从而实现系统稳定。因此, 通过状态反馈能使该系统镇定。

5-3 解 补偿器传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{W}_o^{-1}(s) \mathbf{W}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s(s+3)}{2s(2s+1)-2} & 0 \\ \frac{-s(s+1)}{s(2s+1)-1} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

系统结构如图 A5.2 所示。图中 $G_{c11} = \frac{s(s+3)}{2s(2s+1)-2}, G_{c21} = \frac{-s(s+1)}{s(2s+1)-1}, G_{c22} = \frac{s+1}{5s}$ 。

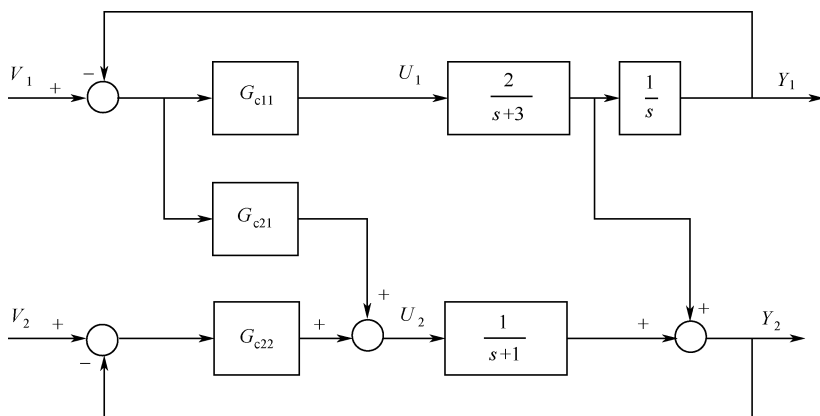


图 A5.2 带补偿器的闭环反馈系统

5-4 解 (1)耦合性分析

$$W_o(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+1} & \frac{2}{s(s^2+1)} \\ -\frac{2}{s(s^2+1)} & \frac{s^2-3}{s^2(s^2+1)} \end{bmatrix}$$

因 $W_o(s)$ 不是对角线矩阵, 故系统 $\sum(A, B, C)$ 存在耦合关系。

(2) 解耦计算

因 $C_1 A^0 B = [0 \ 0]$, $C_1 A^1 B = [1 \ 0] \neq 0$, 故 $d_1 = 1$

因 $C_2 A^0 B = [0 \ 0]$, $C_2 A^1 B = [0 \ 1] \neq 0$, 故 $d_2 = 1$

于是

$$L = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ C_2 A^{d_2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = E^{-1} = I \quad K = E^{-1}L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

引入状态反馈和输入变换后, 系统的传递函数矩阵变为

$$W(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BF = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

状态反馈解耦系统的结构如图 A5.3 所示。

5-5 解 (1)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 - 101\tilde{x}_1 - 16\tilde{x}_2 + u$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + 6(x_1 - \tilde{x}_1)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -3\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 - 2(x_1 - \tilde{x}_1) - 101\tilde{x}_1 - 16\tilde{x}_2 + u$$

$$\dot{x}_{1e} = \dot{x}_1 - \dot{\tilde{x}}_1 = -6x_{1e} + x_{2e}$$

$$\dot{x}_{2e} = \dot{x}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 = -x_{1e} - 4x_{2e}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_e$$

重构状态误差为

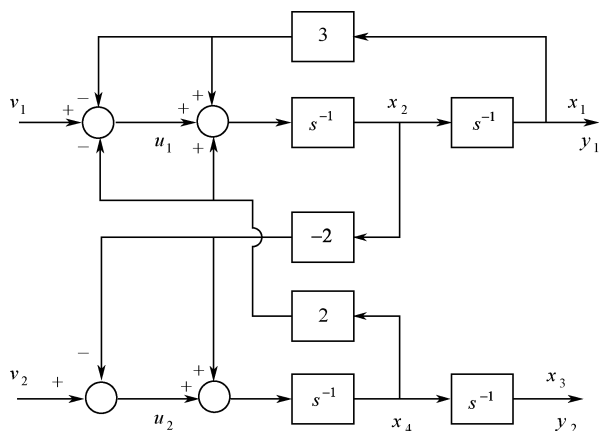


图 A5.3 状态反馈解耦系统

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix} e^{-5t} \mathbf{x}_e(0)$$

重构状态随系统状态变化的规律为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix} e^{-5t} \mathbf{x}_e(0)$$

(2) 因当时间足够大时 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, 所以, 在稳定工作状态下, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 4x_2 - 101\tilde{x}_1 - 16\tilde{x}_2 + u = -104x_1 - 20x_2 + u \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -104 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

系统的特征值方程为

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 104 & s+20 \end{bmatrix} = s^2 + 20s + 104 = 0$$

在稳定工作状态下系统的特征值为

$$s_{1,2} = -10 \pm j2$$

5-6 解 (1) 能控性和能观测性检验

系统能控性矩阵和能观测性矩阵的秩分别为 $\text{rank}[\mathbf{M}_c] = 2, \text{rank}[\mathbf{M}_o] = 2$ 。故系统状态既能控又能观测。

(2) 确定状态反馈增益矩阵

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] = [12 \quad 7]$$

(3) 确定输出反馈增益矩阵

$$\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2]^T = [24 \quad 144]^T$$

(4) 带全维状态重构器的闭环反馈系统的结构如图 A5.4 所示。

5-7 解 (1) \mathbf{x} 的重构状态为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} w + \mathbf{G}y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w + 12y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ w + 12y \end{bmatrix} \\ \dot{w} &= -10w - 144y + u \end{aligned}$$

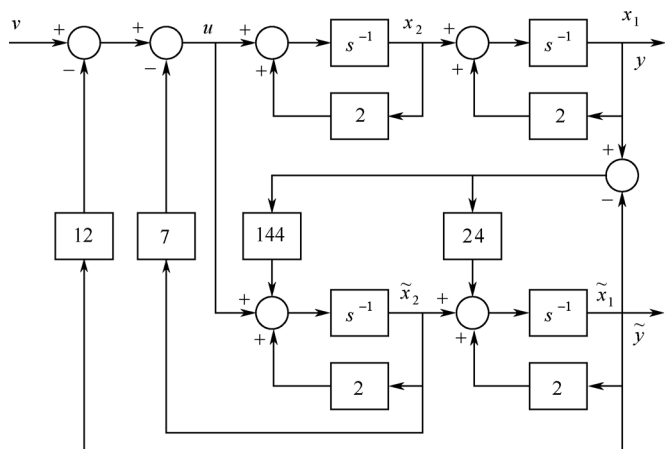


图 A5.4 带全维状态重构器的闭环反馈系统

(2) 状态反馈增益矩阵为 $\mathbf{K} = [12 \quad 7]$ 。

(3) 带降维状态重构器的闭环反馈系统结构如图 A5.5 所示。

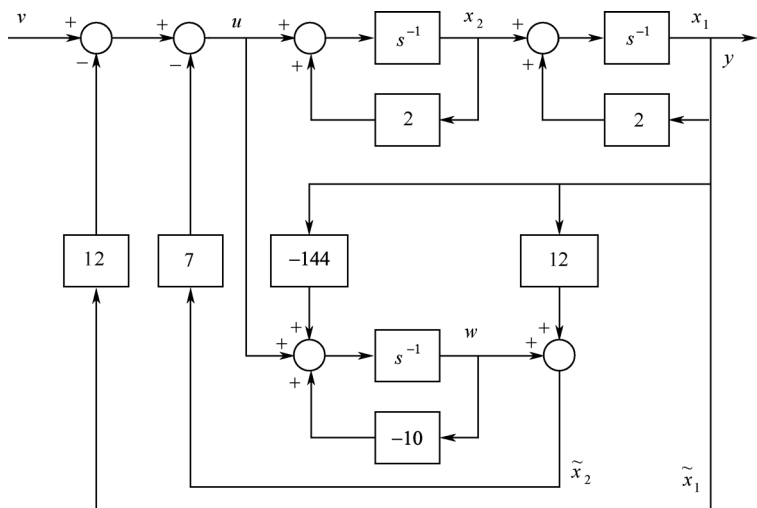


图 A5.5 带降维状态重构器的闭环反馈系统

第 6 章

6-1 解 这是一个始端状态与时间给定、终端时间给定而终端状态受约束的最优控制问题。

系统的哈密顿函数为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2}u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 - 6x_2 + u \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-5x_1 - 6x_2 + u)$$

系统的哈密顿正则方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{E1})$$

$$\dot{\lambda} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}\lambda \quad (\text{E2})$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \quad (\text{E3})$$

由式(E1)和式(E2)知,状态方程与协态方程不存在耦合关系,故可独立求解,无须联立求解。

(1) 解协态方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \lambda = \mathbf{A}\lambda \\ \lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \lambda(0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (5e^t - e^{5t})\lambda_1(0) + 5(e^{5t} - e^t)\lambda_2(0) \\ (e^t - e^{5t})\lambda_1(0) + (5e^{5t} - e^t)\lambda_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} [5(\lambda_1(0) - \lambda_2(0))]e^t + [5\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]e^{5t} \\ [(\lambda_1(0) - \lambda_2(0))]e^t + [5\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k_1 e^t + k_2 e^{5t} \\ k_1 e^t + k_2 e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E4})$$

式中

$$k_1 = \frac{1}{4} [\lambda_1(0) - \lambda_2(0)] \quad (\text{E5})$$

$$k_2 = \frac{1}{4} [5\lambda_2(0) - \lambda_1(0)] \quad (\text{E6})$$

(2) 解控制方程

由式(E3)和式(E4)得

$$u = -\lambda_2 = -k_1 e^t - k_2 e^{5t} \quad (\text{E7})$$

(3) 解状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

因系统初始状态为 0,故

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s)] = -L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+5)(s+1)} \left(\frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-5} \right) \\ \frac{s}{(s+5)(s+1)} \left(\frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-2} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{24}(3k_1 + k_2)e^{-t} - \frac{1}{120}(5k_1 + 3k_2)e^{-5t} - \frac{1}{60}k_2 e^{5t} - \frac{1}{12}k_1 e^t \\ -\frac{1}{24}(3k_1 + k_2)e^{-t} + \frac{1}{24}(5k_1 + 3k_2)e^{-3t} - \frac{1}{12}k_2 e^{5t} - \frac{1}{12}k_1 e^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E8})$$

(4) 确定系数

① 横截条件

令

$$\xi = x_1(2) + 2x_2(2) - 1$$

$$\theta = [x_1(2) + x_2(2)]^2$$

该最优控制问题的横截条件为

$$\lambda_1(2) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1(2)} + \frac{\partial \xi}{\partial x_1(2)} \eta = 2[x_1(2) + x_2(2)] + \eta \quad (\text{E9})$$

$$\lambda_2(2) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2(2)} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2(2)} \eta = 2[x_1(2) + x_2(2)] + 2\eta \quad (\text{E10})$$

式中, η 为待定系数。

从式(E9)和式(E10)中消去 η , 得

$$2[x_1(2) + x_2(2)] - 2\lambda_1(2) + \lambda_2(2) = 0 \quad (\text{E11})$$

② 边界条件

$$\xi = x_1(2) + 2x_2(2) - 1 = 0 \quad (\text{E12})$$

由式(E4)、式(E8)、式(E11)和式(E12)可得

$$k_1 = 0.1153, k_2 = -3 \times 10^{-4}$$

(5) 解集

① 状态向量

将 k_1 和 k_2 的值代入式(E8), 得

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{0.3456}{24} e^{-t} - \frac{0.5757}{120} e^{-5t} + \frac{10^{-4}}{20} e^{5t} - \frac{0.1153}{12} e^t \\ -\frac{0.3456}{24} e^{-t} + \frac{0.5757}{24} e^{-3t} + \frac{10^{-4}}{4} e^{5t} - \frac{0.1153}{12} e^t \end{bmatrix} \quad (\text{E13})$$

② 协态向量

将 k_1 和 k_2 的值代入式(E4), 得

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5766 e^t - 3 \times 10^{-4} e^{5t} \\ 0.1153 e^t - 3 \times 10^{-4} e^{5t} \end{bmatrix} \quad (\text{E14})$$

③ 最优控制

由式(E7)和式(E14)可得

$$u = -\lambda_2 = -0.1153 e^t + 3 \times 10^{-4} e^{5t} \quad (\text{E15})$$

④ 目标泛函值

$$J(u) = [x_1(2) + x_2(2)]^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt = 0.7838$$

6-2 解 (1) 系统能控性检验

能控性矩阵为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 2$, 故系统状态能控。

(2) 选择加权矩阵

动态状态误差加权系数矩阵取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 动态控制加权系数取 $R = 1/2$ 。

(3) 解黎卡提矩阵方程

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

设 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$, 将各系数矩阵代入上式, 得

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

解方程得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) 解最优轨线方程

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解该方程, 可得最优轨线表达式, 即

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^{-t} [\cos(t) - 3\sin(t)] \\ e^{-t} [\cos(t) + 2\sin(t)] \end{bmatrix}$$

(5) 求最优控制

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -2e^{-t} [2\cos(t) - \sin(t)]$$

(6) 输出量

$$y = x_2 = e^{-t} [\cos(t) + 2\sin(t)]$$

(7) 最小目标泛函值

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = 2.5$$

(8) 状态调节器系统结构图

状态调节器系统结构图如图 A6.1 所示。

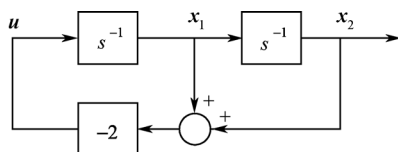


图 A6.1 系统结构图

6-3 解 (1) 系统能观测性

能观测性矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2$, 故系统状态能观测。

(2) 选择加权系数

前面题 6-2 设计的是状态调节器, 动态状态误差加权系数矩阵取 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 动态控制加权系数取 $R = 0.5$ 。

如果本例动态输出误差加权系数取 $Q = 2$, 则 $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 若动态控制加权系数也取 $R = 0.5$, 那么输出调节器的设计计算就与题 6-2 状态调节器的设计计算完全相同。

6-4 解 哈密尔顿函数

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)] = \frac{1}{2} u^2(k) + [\boldsymbol{\lambda}_1(k+1) \boldsymbol{\lambda}_2(k+1)] \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) + u(k) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda_1(k+1)[x_1(k) + 0.1x_2(k)] + \lambda_2(k+1)[x_2(k) + u(k)]$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), u(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda_2(k+1) = 0 \quad (\text{E1a})$$

$$u(k) = -\lambda_2(k+1) \quad (k=0, 1) \quad (\text{E1b})$$

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} \quad (k=0, 1) \quad (\text{E2})$$

$$\text{协态方程} \quad \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), u(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial \mathbf{x}(k)} = \begin{bmatrix} \lambda_1(k+1) \\ 0.1\lambda_1(k+1) + \lambda_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (k=1) \quad (\text{E3})$$

$$\text{边界条件} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}(2) = 0$$

(1) 解协态方程

$$\boldsymbol{\lambda}(1) = \begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(2) \\ 0.1\lambda_1(2) + \lambda_2(2) \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

(2) 解状态方程

将式(E1b)代入式(E2)可得

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) - \lambda_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (\text{E5})$$

将 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 代入上式并逐步向下进行迭代,得

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(0) + 0.1x_2(0) \\ x_2(0) - \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda_2(1) \end{bmatrix} \quad (\text{E6})$$

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} x_1(1) + 0.1x_2(1) \\ x_2(1) - \lambda_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.1\lambda_2(1) \\ -\lambda_2(1) - \lambda_2(2) \end{bmatrix} \quad (\text{E7})$$

将边界条件 $\mathbf{x}(2) = 0$ 代入上式,可得

$$\lambda_2(1) = 10$$

$$\lambda_2(2) = -10$$

将此二值分别代入式(E6)和式(E4),得

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(2) \\ 0.1\lambda_1(2) + \lambda_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(2) \\ 0.1\lambda_1(2) - 10 \end{bmatrix} \quad (\text{E8})$$

解方程得

$$\lambda_1(1) = \lambda_1(2) = 200$$

(3) 求控制序列

由式(E1b)得

$$u(1) = -\lambda_2(2) = 10$$

$$u(0) = -\lambda_2(1) = -10$$

(4) 最小目标泛函值

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) = 100$$

6-5 解 令

$$\theta(\mathbf{x}(3)) = \frac{1}{2} x_2^2(3)$$

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2} u^2(k)$$

哈密尔顿函数

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)] &= \frac{1}{2} u^2(k) + [\boldsymbol{\lambda}_1(k+1) \boldsymbol{\lambda}_2(k+1)] \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} u^2(k) + \boldsymbol{\lambda}_1(k+1) [x_1(k) + 0.1x_2(k)] + \boldsymbol{\lambda}_2(k+1) [x_2(k) + u(k)] \end{aligned}$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial u(k)} = u(k) + \boldsymbol{\lambda}_2(k+1) = 0 \quad (\text{E1a})$$

$$u(k) = -\boldsymbol{\lambda}_2(k+1) \quad (k=0, 1, 2) \quad (\text{E1b})$$

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k) - \boldsymbol{\lambda}_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (k=0, 1, 2) \quad (\text{E2})$$

$$\text{协态方程} \quad \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1)]}{\partial \mathbf{x}(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(k+1) \\ 0.1\boldsymbol{\lambda}_1(k+1) + \boldsymbol{\lambda}_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (k=1, 2) \quad (\text{E3})$$

$$\text{横截条件} \quad \boldsymbol{\lambda}(3) = \frac{\partial \theta[\mathbf{x}(3)]}{\partial \mathbf{x}(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E4})$$

边界条件

$$\mathbf{x}(0) = [1 \quad 4]^T$$

(1) 解协态方程

$$\boldsymbol{\lambda}(1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(1) \\ \boldsymbol{\lambda}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(2) \\ 0.1\boldsymbol{\lambda}_1(2) + \boldsymbol{\lambda}_2(2) \end{bmatrix} \quad (\text{E5})$$

$$\boldsymbol{\lambda}(2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(2) \\ \boldsymbol{\lambda}_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(3) \\ 0.1\boldsymbol{\lambda}_1(3) + \boldsymbol{\lambda}_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E6})$$

由横截条件式(E4)得

$$\boldsymbol{\lambda}(3) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(3) \\ \boldsymbol{\lambda}_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(3) \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\boldsymbol{\lambda}_1(3) = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2(3) = x_2(3)$$

将此二值代入式(E6)和式(E5)并进行迭代计算,得

$$\boldsymbol{\lambda}_1(2) = \boldsymbol{\lambda}_1(3) = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2(2) = 0.1\boldsymbol{\lambda}_1(3) + \boldsymbol{\lambda}_2(3) = x_2(3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1(1) = \boldsymbol{\lambda}_1(2) = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2(1) = 0.1\boldsymbol{\lambda}_1(2) + \boldsymbol{\lambda}_2(2) = x_2(3)$$

(2) 解状态方程

将 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 4]^T$ 和已求得的协态变量代入式(E2)并逐步向下进行迭代,得

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + 0.1x_2(0) \\ x_2(0) - \boldsymbol{\lambda}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 4 - \boldsymbol{\lambda}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 4 - x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E7})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) + 0.1x_2(1) \\ x_2(1) - \lambda_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 - 0.1x_2(3) \\ 4 - 2x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E8})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(2) + 0.1x_2(2) \\ x_2(2) - \lambda_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 - 0.3x_2(3) \\ 4 - 3x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{E9})$$

解方程式(E9),可得

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将 $\mathbf{x}(3)$ 代入式(E8)和式(E7)并进行迭代计算,得

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3) 求控制序列

将已求得的状态和协态变量代入式(E1b),得

$$u(0) = -\lambda_2(1) = -x_2(3) = -1$$

$$u(1) = -\lambda_2(2) = -x_2(3) = -1$$

$$u(2) = -\lambda_2(3) = -x_2(3) = -1$$

(4) 最小目标泛函值

$$J^* = \frac{1}{2}x_2^2(3) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 u^2(k) = 2$$

6-6 解

$$\theta(\mathbf{x}(3)) = \frac{1}{2}x_2^2(3)$$

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2}u^2(k)$$

(1) 决策分级和倒序建档迭代计算

根据给定目标泛函,终端步数 $N=3$,该最优控制问题可划分为 3 级决策问题。

第 3 级状态转移决策的目标泛函为

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \min_{u(2)} \{L[\mathbf{x}(2), \mathbf{u}(2)] + \theta(\mathbf{x}(3))\} = \min_{u(2)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(2) + \frac{1}{2}x_2^2(3) \right\} \quad (\text{E1a})$$

由状态方程求出 $x_2(3)$ 并代入上式,可得

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \min_{u(2)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(2) + \frac{1}{2}[x_2(2) + u(2)]^2 \right\} \quad (\text{E1b})$$

欲使上式取最小值,须使

$$\frac{\partial J_1[\mathbf{x}(2)]}{\partial u(2)} = x_2(2) + 2u(2) = 0$$

$$u(2) = -\frac{1}{2}x_2(2) \quad (\text{E2})$$

再将上式代入式(E1b),得

$$J_1[\mathbf{x}(2)] = \frac{1}{4}x_2^2(2) \quad (\text{E3})$$

第 2 级状态转移决策的目标泛函为

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \min_{u(1)} \{L[\mathbf{x}(1), u(1)] + J_1[\mathbf{x}(2)]\} = \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(1) + \frac{1}{4}x_2^2(2) \right\} \quad (\text{E4a})$$

由状态方程求出 $x_2(2)$ 并代入上式, 可得

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(1) + \frac{1}{4}[x_2(1) + u(1)]^2 \right\} \quad (\text{E4b})$$

上式取最小值的条件为

$$\frac{\partial J_2[\mathbf{x}(1)]}{\partial u(1)} = \frac{3}{2}u(1) + \frac{1}{2}x_2(1) = 0$$

$$u(1) = -\frac{1}{3}x_2(1) \quad (\text{E5})$$

再将上式代入式(E4b), 得

$$J_2[\mathbf{x}(1)] = \frac{1}{6}x_2^2(1) \quad (\text{E6})$$

第 1 级状态转移子决策的目标泛函为

$$J_3[\mathbf{x}(0)] = \min_{u(0)} \{L[\mathbf{x}(0), u(0)] + J_2[\mathbf{x}(1)]\} = \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{6}x_2^2(1) \right\} \quad (\text{E7a})$$

由状态方程求出 $x_2(1)$ 并代入上式, 可得

$$J_3[\mathbf{x}(0)] = \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{6}[x_2(0) + u(0)]^2 \right\} \quad (\text{E7b})$$

上式取最小值的条件为

$$\frac{\partial J_3[\mathbf{x}(0)]}{\partial u(0)} = \frac{4}{3}u(0) + \frac{1}{3}x_2(0) = 0$$

$$u(0) = -\frac{1}{4}x_2(0) \quad (\text{E8})$$

由给定的初始条件 $x_2(0) = 4$, 可得

$$u(0) = -1$$

(2) 顺序查档迭代计算

将 $u(0) = -1$ 代入状态方程, 得

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

依次向上进行迭代计算, 得

$$u(1) = -\frac{1}{3}x_2(1) = -1$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u(2) = -\frac{1}{2}x_2(2) = -1$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{b}u(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

最优控制目标泛函值为

$$J^* = J_3[\mathbf{x}(0)] = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{6}x_2^2(1) = 2$$

参 考 文 献

- [1] 韩致信. 机械工程控制基础. 北京:北京大学出版社,2008.
- [2] 王积伟. 现代控制理论与工程. 2 版. 北京:高等教育出版社,2010.
- [3] 刘豹. 现代控制理论. 2 版. 北京:机械工业出版社,2004.
- [4] 胡寿松. 自动控制原理. 5 版. 北京:科学出版社,2007.
- [5] 李国勇. 现代控制理论习题集. 北京:清华大学出版社,2011.
- [6] Katsuhiko Ogata. MATLAB for Control Engineers. 北京:电子工业出版社,2001.
- [7] 王正盛. MATLAB 与科学计算. 北京:国防工业出版社,2011.
- [8] 陈炳和. 计算机控制系统基础. 北京:北京航空航天大学出版社,2001.
- [9] 李传江,马广富. 最优控制. 北京:科学出版社,2011.
- [10] 老大中. 变分法基础. 2 版. 北京:国防工业出版社,2007.
- [11] 苏家铎. 泛函分析与变分法. 合肥:中国科学技术大学出版社,1993.
- [12] Charles L Phillips, Royce D Haror. Feedback Control Systems. 4th ed. Upper Saddle River N.J. : Prentice Hall Inc. , 2000.
- [13] Katsuhiko Ogata. Modern Control Engineering. 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall Inc. , 1997.
- [14] Benjamin O Kuo. Automatic Control Systems. 7th ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall Inc. , 1997.
- [15] Raymond T Stefnaï, Clement J Savant, Bahram Shahian, Grne H Hosteffeffer. Design of Feedback Control Systems. 3rd ed. Boston, New York: Harcourt Brace Jovanovrch College Publishers, 1994.
- [16] Karl J Astrom, Bjorn Witten Mark. Computer-Controlled Systems: Theory and design. 3rd ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [17] Gene F Franklin, J David Powell. Feedback Control of Dynamic Systems. 3rd ed. Addisonwesly Longman, Inc. : Menlo Park,1998.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010)88254396；(010)88258888

传 真：(010)88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036